This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

3 3433 06909516 8

Planimetry
(I. c)
861
14

Die Planimetrie und Stereometrie

für

den Schulunterricht

bearbeitet

von

Carl Koppe,
Oberlehrer am Gymnasium zu Soest.

NEW YORK PUBLIC LIBRARY

Essen,
Druck und Verlag von G. D. Bädeker.
1836.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY

ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS
R A

Vorrede.

Das vorliegende Bändchen ist nach einem ähnlichen Plane, wie das erste gearbeitet. Auch hier sind in den ersten Abschnitten der ersten Abtheilung, Planimetrie, die Beweise der Sätze größtentheils nur angedeutet. Eine vollständige Ausführung der Beweise würde eine heuristische Behandlung fast ganz ausgeschlossen und so dem Schüler einen Hauptgenuß entzogen haben, welchen bei dem heuristischen Verfahren der geometrische Unterricht dem Anfänger zu gewähren pflegt. Denn in der That nehmen in der Regel die Schüler an dem Aufsuchen der Beweise mit vielem Eifer und großer Regsamkeit Theil, und wenn auch freilich hierbei hinter den Fähigern die Schwächern zurückbleiben, so wirkt doch auch auf diese das Beispiel einer regsamen geistigen Thätigkeit antreibend und belebend ein; auch bin ich gar nicht selten durch treffende Antworten und glückliche Gedanken von Schülern überrascht worden, deren sonst langsame Fortschritte mich dergleichen am wenigsten vermuthen ließen. Allerdings aber ist es der Billigkeit angemessen, bei leichtern Sätzen vorzugsweise die Schwächern in Anspruch zu nehmen und diesen überhaupt beim Antworten vor den Andern ein Vorrecht einzuräumen. — In den

drei letzten Abschnitten der Planimetrie und in der Stereometrie, welche für den Unterricht in den obersten Classen eines Gymnasiums bestimmt ist, sind alle Sätze ohne Ausnahme mit vollständigen Beweisen, so wie alle Aufgaben mit vollständigen Auflösungen versehen. *) Um indeß auch hier den Schülern Gelegenheit zur eigenen Thätigkeit und zur Uebung ihrer Kräfte zu geben, habe ich in der Stereometrie minder wichtige Sätze, welche für den Zusammenhang nicht grade unentbehrlich sind, ohne allen Beweis in Anmerkungen hinzugefügt. Das Aufsuchen und Ausarbeiten der fehlenden Beweise wird für den Anfänger eine besonders nützliche Beschäftigung sein.

Was nun ferner die Reihenfolge der einzelnen Lehren in der Planimetrie betrifft, so scheint beim ersten Anblick aus der Natur des Gegenstandes sich die folgende Anordnung zu ergeben, bei welcher vom Einfachern zum Zusammengesetztern fortgeschritten wird, und die auch wirklich viele Lehrbücher befolgen: Grade Linie, Winkel, parallele Linien, Vieleck, Kreis. Hierbei giebt sich jedoch sogleich darin ein großer Uebelstand zu erkennen, daß sich nicht mit Sicherheit darüber entscheiden läßt, welche Sätze eigentlich zum Kreise gehören, indem die Sätze, welche z. B. in der vorliegenden Schrift unter diese Ueberschrift zusammengefaßt sind, sich mit wenigen Ausnahmen auch recht gut ohne alle Erwähnung des Kreises behandeln lassen, wie dieß z. B. wirklich in einem sehr schätzbaren geometrischen Lehrbuche **) geschehen ist. Auch sind in der That jene Sätze bloß eine Fortsetzung und Erweiterung der Lehre vom Dreieck und Vieleck überhaupt, und die Vorstellung des Kreises ist mit denselben — wenig-

*) Ueber die Gründe, welche mich zu dieser Behandlungsweise bestimmt haben, vergleiche die Vorrede zum ersten Bändchen, S. X und XI.

**) Crelle, Lehrbuch der Elemente der Geometrie. Berlin, 1826.

stens in der vorliegenden Schrift — nur um größerer Kürze und Anschaulichkeit der Darstellung willen verbunden worden. — Andererseits stellt sich bei einer gründlichern Ansicht ein höherer Eintheilungsgrund in Folgendem heraus: Die Vergleichung räumlicher Größen führt entweder zur Gleichheit oder Verschiedenheit; die Gleichheit kann aber eine doppelte sein: entweder Gleichheit verbunden mit Identität — Congruenz — oder Gleichheit ohne Identität. Da aber Congruenz das einfachste Verhältniß ist, welches überhaupt zwischen Größen statt finden kann, so gehen die Sätze, welche sich mit der Vergleichung der Größen beschäftigen, in wiefern sie congruent oder nicht congruent sind, allen andern voraus, und zwar nehmen Linie und Winkel hier die erste Stelle ein (Abschnitt 1 u. 2), weil sie überhaupt keine andere Vergleichung zulassen; zu den Sätzen vom Winkel gehören aber offenbar auch die über parallele Linien (Abschn. 3), und es folgen nun Sätze über die Vielecke, in wiefern dieselben congruent sind oder nicht, oder in wiefern überhaupt nur von Gleichheit oder Ungleichheit der Linien und Winkel in oder an denselben die Rede ist (Abschn. 4—6). — Weiter hat aber auch die Verschiedenheit grade wieder ihre Gleichheit, nehmlich die der Verschiedenheit oder des Verhältnisses, und hieraus entspringt ein folgender Abschnitt (7), von den Verhältnissen und Proportionen und der Aehnlichkeit der Figuren, indem man nehmlich diejenigen Figuren ähnlich nennt, welche in dem Verhältniß aller in denselben zu ziehenden gleichliegenden Linien übereinstimmen. Sind aber in den vorhergehenden Abschnitten eigentlich überall nur Linien und Winkel mit einander verglichen worden, in wiefern sie congruent sind oder nicht, so lassen Figuren noch eine andere Vergleichung zu, nehmlich in Hinsicht ihrer Größe oder ihres Inhalts, abgesehen von Congruenz; an diese

Vergleichung zunächst der gradlinigen Figuren (Abschn. 8) reiht sich endlich noch ein besonderer Abschnitt (9) über die Ausmessung des Kreises.

In diese (neun) ersten Abschnitte habe ich indeß nur die wichtigsten und einfachsten Sätze aufgenommen; schwierigere oder minder wichtige Sätze sind in den folgenden Abschnitten zusammengestellt.*) Außerdem finden sich in den ersten neun Abschnitten noch einige Sätze, welche zwar für strenge wissenschaftliche Begründung nicht entbehrt werden können, ihrem Inhalt nach aber für das Verständniß des Anfängers zu abstract und daher bei einem ersten Cursus vorläufig zu übergehen sein dürften; diesen Sätzen ist im Text ein Sternchen (*) vorgesetzt. — Die drei letzten Abschnitte der Planimetrie können nach Umständen in der Schule durchgenommen oder auch, wenn Mangel an Zeit oder andere Verhältnisse hindern, theilweise oder ganz übergangen werden. In dem letztern Falle werden diese Abschnitte dem strebsamern Schüler

*) Für diese Abschnitte habe ich besonders die Lehrbücher von Crelle, Legendre, Ohm und Wolf (Lehrb. d. Geom. Th. 1, Berlin 1833) und die Sammlung geometrischer Aufgaben von Gerwien und Holleben (2. Bd., Berlin 1831 und 1832) benutzt. Eine eigenthümliche Ableitung habe ich in den §§. 231 u. 232 versucht; neu dürfte §. 208, 3. sein. — Es möchte hier vielleicht an der Stelle sein, auch die andern Bücher namhaft zu machen, welche ich für die übrigen Abschnitte benutzt habe. Ich würde dieß mit Vergnügen thun; allein die vorliegende Schrift ist nicht als die flüchtige Arbeit weniger Wochen, sondern als das Ergebniß zehnjähriger amtlicher Thätigkeit und vieljähriger Studien anzusehen. Wo ich irgend in dieser Zeit etwas Nützliches fand, das habe ich mir anzueignen gesucht; und nicht selten ist dieß der Fall bei Büchern gewesen, die ich nicht selbst besaß, und in die mir nur eine flüchtige Einsicht verstattet war, so daß ich gegenwärtig gänzlich außer Stande bin, die Quellen, aus denen ich geschöpft habe, einigermaßen vollständig anzugeben. Ich bitte daher den Leser, als solche überhaupt die neuern mathematischen Lehrbücher anzunehmen.

eine vortheilhafte Gelegenheit zur Beschäftigung des Privatfleißes darbieten.*) Viele Lehrbücher nehmen für diesen Zweck eine kleinere oder größere Zahl von Aufgaben auf. Diese scheinen mir indeß hierzu wenig geeignet; denn mit Aufgaben ohne Lösung wird dem Anfänger nicht viel gedient sein, und eine Reihe von Aufgaben mit ihren Auflösungen nach einander zu lesen, hat etwas ungemein Ermüdendes. Für die Uebung im Auflösen geometrischer Aufgaben, die für den Schüler ebenso viel Anziehendes, als Bildendes zu haben pflegt, ist wohl der einzig angemessene Weg der, daß der Lehrer mit Berücksichtigung der Kräfte der Schüler die Aufgaben stellt und die Auflösungen durchsieht und verbessert.**) An Aufgaben indeß, welche dem Anfänger als Beispiele und Anleitung für die Behandlung geometrischer Aufgaben überhaupt dienen können, ist auch in der vorliegenden Schrift kein Mangel.

Da der Unterricht in der Geometrie — wenigstens an den westphälischen Gymnasien — sehr zweckmäßig auf einer frühern Stufe beginnt, als der wissenschaftliche arithmetische — jener in Quarta, dieser in Tertia — und daher die ersten Abschnitte dieses Bändchens zur allerersten Einführung des Schülers in die mathematischen Wissenschaften überhaupt bestimmt sind, so habe ich mich bemüht, dem Anfänger die Sache so leicht als mög-

---

*) Diese Rücksicht scheint gegenwärtig um so wichtiger, da das Königliche Hochlöbliche Provinzial-Schul-Collegium in einer unterm 26. Nov. v. J. erlassenen Verfügung den Lehrern der obern Classe anempfohlen hat, für zweckmäßige Privatbeschäftigungen der Schüler Sorge zu tragen.

**) Reichlichen Stoff bietet die vorher angeführte vortreffliche Aufgabensammlung von Gerwien und Holleben dar, die sich vor andern ähnlichen Sammlungen durch Mannigfaltigkeit und Reichhaltigkeit, sowie besonders durch planmäßige Anordnung auszeichnet.

lich zu machen, um nicht den Schwächern sogleich durch Schwierigkeiten von vorn herein vom mathematischen Studium zurückzuschrecken. Ich habe es versucht, so viel ich es vermochte, mich auf den Standpunkt 10—14jähriger Knaben zu versetzen, und überhaupt nach möglichster Verständlichkeit und Faßlichkeit gestrebt. Zur Erreichung dieses Zwecks habe ich es für erforderlich gehalten, die Sätze möglichst naturgemäß ihrem Inhalte nach zu ordnen, indem nur so von dem Anfänger Uebersicht des Zusammenhangs gewonnen werden kann, und dahin gestrebt, jede Wahrheit auf die möglichst einfache und dem kindlichen Geiste angemessene Art aus den vorhergehenden Sätzen abzuleiten, und jedes künstliche Verfahren, so viel es sein konnte, ausgeschlossen. Wenn ich z. B. Schüler, welche mit der Lehre vom Dreieck noch gänzlich unbekannt sind, veranlasse, sich ein gleichschenkliges Dreieck vorzustellen, so wird unter allen auch nicht einer sich finden, der von der Gleichheit der Winkel an der Grundlinie nicht vollkommen überzeugt wäre, und ich würde mich vergeblich bemühen, bei irgend einem Schüler einen Zweifel an der Richtigkeit dieses Satzes zu erzeugen. Offenbar gründet sich diese Ueberzeugung nicht auf irgend eine Erfahrung, da wohl kaum einer der Schüler an einem in der Zeichnung entworfenen gleichschenkligen Dreiecke die Gleichheit der Winkel an der Grundlinie durch Messung vorher erprobt haben dürfte. Es muß daher eine von allem Erfahrungsmäßigen unabhängige Schlußfolge die Ueberzeugung herbeiführen. Diese Schlußfolge nun zum klaren Bewußtsein zu erheben und in einen bestimmten Ausdruck in Worten zu gestalten, dahin habe ich hier und an allen verwandten Stellen gestrebt. *) —

*) Offenbar ist es in dem angeführten Falle der Satz vom zureichenden Grunde, welcher dem Schüler unbewußt vorschwebt.

Nur ſolche Beweiſe, welche der Schüler ſelbſt aufzufinden im Stande iſt, können für ein wahres Eigenthum deſſelben gelten und dazu dienen, ihm den Weg anzudeuten, auf welchem es ihm gelingen dürfte, durch eigene Kraft mit Hülfe der gewonnenen Kenntniſſe neue Wahrheiten zu entdecken. — Und würde es nicht überdieß gewiſſermaßen eine Unredlichkeit ſein, wenn ich dem Schüler z. B. den euclidiſchen Beweis des Satzes, daß ein Dreieck durch ſeine drei Seiten beſtimmt wird, als mein Eigenthum vortragen wollte, da ſich doch meine eigene, urſprüngliche Ueberzeugung von der Richtigkeit jenes Satzes auf ganz andere Gründe ſtützt, ſowie es auch leicht geſchehen mag, daß ich nach Jahren dieſen Beweis und alle andern Beweiſe der Lehrbücher überhaupt vergeſſe, während es nicht wohl denkbar iſt, daß ich auf gleiche Weiſe die Kenntniß des Satzes ſelbſt und die Ueberzeugung von der Richtigkeit deſſelben verlieren ſollte.

Uebrigens iſt mir keineswegs verborgen, wie meine Arbeit hinter dem Ziele, nach welchem ich ſtrebte, noch weit zurückgeblieben iſt, und wie es mir nicht hat gelingen wollen, alle Schwierigkeiten zu beſeitigen. *) Ich glaubte indeß dem Leſer eine Auskunft über den Plan, nach welchem ich gearbeitet habe, ſchuldig zu ſein. — Im Allgemeinen wird man, wie ich hoffe, Faßlichkeit und Einfachheit der Darſtellung meiner Arbeit nicht abſprechen; dagegen bin ich allerdings darauf gefaßt, von manchem Leſer in zwiefacher Hinſicht den Vorwurf der Oberflächlichkeit zu erfahren, zunächſt in Hinſicht des

Bald einleuchtende Gründe verbieten es jedoch, einen ſo allgemeinen Satz an die Spitze eines Lehrbuchs zu ſtellen und dem Anfänger ein ſo kräftiges, aber auch gefährliches Rüſtzeug ohne Weiteres in die Hände zu geben.

*) Als ſolche Sätze, deren Behandlung mich nicht befriedigt, kann ich z. B. §. 88 und 110 anführen.

folgenden Satzes, deſſen ich mich ſtillſchweigend als eines Grundſatzes bedient habe: Von jeder räumlichen Größe giebt es eine Hälfte, ein Drittel, überhaupt jeden beliebigen aliquoten Theil. — Wenn nun auch nach dem Vorgange von Euclid die Verfaſſer der meiſten geometriſchen Lehrbücher die Anwendung dieſes Satzes für unzuläßig erachtet haben, ſo iſt doch gewiß nicht in Abrede zu ſtellen, daß einmal die Richtigkeit deſſelben auch dem ſchwächſten Anfänger von ſelbſt einleuchtet, und daß andererſeits auch der ſcharfſinnigſte Mathematiker bis jetzt noch nicht im Stande geweſen iſt, den Satz mit euclidiſcher Einfachheit und Strenge allgemein zu erweiſen, während er nicht im mindeſten an der Richtigkeit deſſelben zweifelt, auch gar kein Bedenken trägt, ihn in der höhern Geometrie, wo es nöthig iſt, ohne Weiteres anzuwenden. — Wozu aber könnte es dienen, wenn ich meiner Arbeit, die vorzugsweiſe für jüngere Schüler beſtimmt iſt, Feinheiten eingeflochten und auf eine ſcharfſinnige Weiſe Schwierigkeiten vermieden hätte, für die der Anfänger keinen Sinn und von denen er überhaupt keine Ahnung hat, und die auf der andern Seite auch der ſchärfſte Verſtand nicht vollſtändig zu beſeitigen im Stande iſt. In der That man wolle ſich doch nicht abſichtlich täuſchen; es kann dem einigermaßen gewandten Lehrer keine Mühe machen, den Schüler zu allem Beliebigen abzurichten; aber ein wirkliches, lebendiges Verſtändniß zu erreichen, daß der Schüler von einer Wahrheit in der Art durchdrungen iſt, um nie und auch in fremdartigen Verhältniſſen nicht gegen dieſelbe zu verſtoßen; — gegentheils wäre das Verſtändniß nur ein äußeres, todtes, kein inneres, lebendiges, — iſt ſchwerer, als man gewöhnlich zu meinen ſcheint, und gelingt nur bei einer ſehr allmählig und nach einem möglichſt einfachen Ideengange fortſchreitenden Entwicklung. — Hierzu kommt

noch, daß es ja überhaupt nicht möglich iſt, die Geometrie ſo, wie die Arithmetik, in allen ihren Wahrheiten mit ganz befriedigender Strenge zu begründen, oder was ziemlich daſſelbe ſagen will, daß man trotz aller Mühe noch nicht dahin gelangt iſt und auch nie dahin gelangen wird, aus dem Vortrage der Geometrie alle Grundſätze zu verbannen. Das Mehr oder Weniger in der Zahl derſelben kann aber offenbar den Ausſchlag nicht geben, ſondern allein die Beſchaffenheit des Inhalts kann darüber entſcheiden, ob eine Behauptung als Grundſatz gelten dürfe oder nicht. Wenn aber überhaupt irgend ein Satz als Grundſatz zuläßig iſt, ſo iſt es gewiß der oben angeführte, und es muß mir daher frei ſtehen, z. B. den Satz: Die Linie, welche den Mittelpunkt des Kreiſes mit der Mitte der Sehne verbindet, iſt ſenkrecht auf derſelben, — früher zu erweiſen, ehe noch gezeigt iſt, wie eine Linie halbirt wird, ſo wie ja auch Euclid Sätze über congruente Dreiecke erweiſt, ehe er noch irgend im Stande geweſen iſt, anzugeben, wie congruente Dreiecke in der Zeichnung darzuſtellen ſind. — Dagegen iſt es freilich ein nicht zu duldender Verſtoß gegen die Grundbedingungen einer methodiſchen Darſtellung, wenn Aufgaben mit Hülfe ſich ſchneidender Kreiſe gelöſt werden, ohne daß vorher die Bedingungen ermittelt ſind, unter denen überhaupt Kreiſe ſich ſchneiden, da ſich ja Kreiſe nicht in allen Fällen ſchneiden müſſen. Dieß iſt der Grund, warum in der vorliegenden Schrift erſt nach Beendigung des fünften Abſchnitts Aufgaben behandelt ſind. — Doch zur Rechtfertigung der eigenen Anſicht ſchon zu viel Worte, und Andere überzeugen zu wollen, würde hier der Ort nicht ſein und der Raum nicht ausreichen.

Mehr gegründet iſt ein anderer Vorwurf, den ich auch ohne Weiteres einräume. Die Sätze über die Aus-

messung des Kreises sind in der vorliegenden Schrift nur oberflächlich behandelt. Es gehören aber nach meiner Meinung jene Sätze, welche sich auf die Vergleichung des Graden und Krummen beziehen, keineswegs in die Anfangsgründe, sondern in die höhere Mathematik, nehmlich in den Theil der Integralrechnung, welcher sich mit der Rectification krummer Linien und der Quadratur krummlinig begrenzter Figuren beschäftigt. Um eines einzigen Beispiels willen schien es mir nicht der Mühe zu lohnen, den Anfänger mit einer vollständigen Methode zur Zurückführung des Krummen auf das Grade bekannt zu machen, um so mehr, als das, was die Lehrbücher hierüber gewöhnlich geben, keineswegs geeignet ist, dem Anfänger die Mittel zur eigenen Thätigkeit, zum selbstständigen Forschen in der Anwendung auf die Rectification oder Quadratur anderer krummen Linien darzubieten; vielmehr sind die Verfahrungsarten, die er für diesen Zweck in der höhern Mathematik kennen lernt, von dem Angeführten durchaus verschieden. — Jene Sätze haben nur wegen ihrer practischen Wichtigkeit — ich meine weniger für den bürgerlichen Verkehr, als vielmehr vorzüglich für wissenschaftliche Untersuchungen (der Naturlehre im weitern Sinne) — in der vorliegenden Schrift eine Stelle erhalten, sowie sie auch ohne alle Störung des Zusammenhanges ganz übergangen werden können; sie sind gewissermaßen hier nur historisch, aber doch in solchem Zusammenhange aufgeführt, daß ihre Richtigkeit dem schwächsten, wie dem scharfsinnigsten Verstande einleuchtet. — Aehnliches gilt über die Ausmessung der runden Körper in der Stereometrie.

Wenn ich nun auch in der Planimetrie von Euclid mehrfach abgewichen bin, so betreffen diese Abweichungen doch größtentheils nur einzelne Sätze, und in den meisten Fällen kann ich mich überdieß auf den einen oder

andern Vorgänger stützen. Dagegen habe ich in den Sätzen der Stereometrie, welche die gegenseitige Lage der Linien und Ebenen im Raume behandeln, eine von dem euclidischen Verfahren gänzlich abweichende Bahn zu verfolgen gesucht. Die Gründe, welche mich zu diesem Abgehen von dem Hergebrachten veranlaßt haben, sind im Wesentlichen keine andern, als diejenigen, welche auch in der Planimetrie die Verfasser neuerer geometrischer Lehrbücher bewogen haben, Euclid an vielen Stellen zu verlassen, nehmlich Streben nach Vereinfachung der Darstellung und nach sachgemäßer Anordnung der einzelnen Lehren. Euclid weist bekanntlich auch in der Stereometrie dem einzelnen Satze da seine Stelle an, wo entweder die Mittel zur Beweisführung desselben durch die vorhergehenden Sätze so eben gewonnen sind, oder wo der einzuführende Satz für den Beweis eines folgenden Satzes nicht länger mehr entbehrt werden kann, so daß gar häufig Sätze sehr verschiedenartigen Inhalts unmittelbar neben einander stehen. Mit demselben Rechte aber, wie in jeder andern Wissenschaft, wird offenbar auch in der Geometrie von einer methodischen Behandlung zu fordern sein, daß sie die vorzutragenden Lehren nach der Natur und Verwandtschaft ihres Inhalts ordne und zusammenstelle, wodurch zugleich die Uebersicht über das Ganze wesentlich erleichtert wird.*) An Einfachheit und Faßlichkeit dürfte, wie ich hoffe, die hier befolgte Darstellung der Behandlungsweise des Euclid nicht nachstehen; ob sie aber auch den strengern Anforderungen an wissenschaftliche Folgerichtigkeit und Gründlichkeit Genüge leistet, darüber sehe ich dem Urtheile sachkundiger Leser entgegen, wobei ich jedoch nicht außer Acht zu lassen

*) Ausführlicher habe ich mich hierüber ausgesprochen in Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik B. 14 H. 1 S. 70.

bitte, daß die vorliegende Schrift nur für den Unterricht von Anfängern bestimmt ist. — Bei dieser Gelegenheit kann ich nicht umhin, meinen aufrichtigen Dank gegen Herrn Director Tellkampf auszusprechen, der mich bei Ausarbeitung jener Sätze mit seinem gütigen Rathe mehrfach unterstützt hat.

Außerdem bin ich noch an einer andern Stelle, bei der Ableitung des §. 129 von dem Hergebrachten abgegangen. Dieser wichtige Satz erscheint hier als ein einfaches und unmittelbares Ergebniß aus §. 53 und §. 127, welche indeß keineswegs nur wegen des angeführten Hauptsatzes in der vorliegenden Schrift eine Stelle erhalten haben. Vielmehr haben den erstern Satz (§. 53) wegen seiner wichtigen und häufigen Anwendungen die bessern Lehrbücher schon längst aufgenommen, und der andere Satz (§. 127) ist für den Beweis der Behauptung, daß das Parallelepipedum durch die Diagonalebene halbirt wird, nicht zu entbehren, weshalb derselbe auch in allen Lehrbüchern ohne Ausnahme, wenn auch auf etwas versteckte Weise dargethan wird.

Bei einer Vergleichung des ersten und zweiten Bändchens dürfte vielleicht ein oder der andere Leser sich veranlaßt meinen, mich einer gewissen Ungleichmäßigkeit in der Behandlung zu beschuldigen, indem in dem arithmetischen Theile schon in den ersten Sätzen eine abstractere und weniger veranschaulichende Darstellung befolgt sei, als in dem geometrischen.*) — Hiergegen habe ich zu erinnern, daß einmal der arithmetische Unterricht zweckmäßig später begonnen wird, als der geometrische; daß ferner in den Anfangsgründen der Arithmetik dem Schüler

*) Für die Verständlichkeit der Fassung jener Abschnitte kann ich mich indeß nicht enthalten, das folgende Zeugniß, auf welches ich zufällig in diesen Tagen gestoßen bin, hier anzuführen:

nicht, wie in der Geometrie, neue, ſondern mehrentheils aus dem Rechenunterricht ſchon hinreichend bekannte Wahrheiten vorgeführt werden, — welcher auch die Mittel zur Veranſchaulichung im Ueberfluß darbietet, — daß eben darum der arithmetiſche Unterricht ſeine Bedeutung hauptſächlich in der wiſſenſchaftlichen Behandlung des Gegenſtandes zu ſuchen hat, während der geometriſche ohnehin einer ganz ſtrengen, wiſſenſchaftlichen Behandlung nicht fähig iſt. —

Endlich habe ich noch anzuführen, daß zwar nach der Vorrede zum erſten Bändchen (S. XVI) die Trigonometrie mit der Stereometrie vereinigt werden ſollte, daß aber Schwierigkeiten der Ausführung ein Abgehen von dieſem Plane veranlaßt haben, und die Trigonometrie nun für ſich allein in ungeänderter Geſtalt, ſo wie ſie vor drei Jahren (Soeſt bei Naſſe, 1833) erſchienen iſt, jedoch durch einige Zuſätze, beſonders Aufgaben, vermehrt, das dritte Bändchen bilden wird. Im Uebrigen hat ſich in dem a. a. O. angezeigten Plane nichts geändert. — Wenn nun auf dieſe Art die Stereometrie in einem frühern Bändchen Aufnahme gefunden hat, als die Trigonometrie, ſo iſt dieß doch keineswegs in der Abſicht geſchehen, um anzudeuten, daß auch beim Unterricht die Stereometrie der ebenen Trigonometrie vorangehen müſſe; vielmehr iſt jede der beiden Lehren von der andern ganz unabhängig vorgetragen.

Soeſt, den 14. Auguſt 1836.

Der Verfaſſer.

Einer meiner Schüler, mit welchem ich gegenwärtig im Unterricht erſt bis zur Multiplication vorgeſchritten bin, hat auf eigene Hand, ohne mein Wiſſen, — und gegen meinen Wunſch — alle übrigen im erſten Theile nur angedeuteten Beweiſe (von §. 35 — §. 183) nach Anleitung des Buches vollſtändig ausgearbeitet und hierdurch die ſtufenmäßige Behandlung und die Faßlichkeit der Darſtellung in jenen Sätzen hauptſächlich dargethan.

II. Stereometrie.

Seite

Einleitung. Von Linien in zwei ſich ſchneidenden oder parallelen Ebenen (§. 1 — 19) 151

1. Vom Flächenwinkel.
   A. Vom Flächenwinkel im Allgemeinen (§. 20 — 28) . . 162
   B. Von Ebenen und Linien, welche ſich ſenkrecht durchſchneiden (§. 29 — 44) 166
   C. Von Projectionen (§. 45 — 54) 179
2. Vom körperlichen Dreieck (§. 55 — 74) 190
3. Von den vollſtändig begrenzten Körpern.
   A. Von den eckigen Körpern (§. 75 — 88) 198
   B. Von runden Körpern (§. 89 — 119) 206
   C. Von der Ausmeſſung der eckigen und runden Körper (§. 120 — 143) 224

Druckfehler.

S. 7 Z. 13 v. u. ſtatt: die zwei Paar entgegengeſetzten (Wechſelw.) und die zwei Paar gegenüberſtehenden Winkel gleich. lies: und die zwei Paar entgegengeſetzten (Wechſelw.) gleich und die gegenüberſtehenden Winkel betragen zu beiderſeits einen Flachen.

S. 16 Z. 10 v. u. ſt. $\angle B < A$ l. $\angle A < B$.

S. 62 Z. 15 v. u. ſt. Fig. 31. l. Fig. 32.

S. 62 Z. 12 v. u. ſt. Fig. 29. l. Fig. 31.

S. 68 Z. 6 v. o. ſt. Nr. §. 435 l. der 4te Theil und ſtatt §. 191 l. §. 250.

S. 69 Z. 10 v. u. ſtatt 29, 57.. l. 57, 29..

S. 97 Z. 1 v. o. ſt. 5) l. 3).

S. 113 Z. 13 v. o. ſt. $h =$ l. $h^2 =$.

S. 118 Z. 11 v. u. ſt. $(b-[-y]).(x-b+[x+y])$ l. $(b-[x-y]).(-b+[x+y])$.

S. 143 Z. 5 v. o. ſt. BM und CN l. AM und AN.

S. 144 Z. 4 v. u. ſt. $\frac{1}{2}h-c$ l. $\frac{1}{2}h-2c$.

S. 169 Z. 9 v. u. ſt. AC ∥ BD l. AB ∥ CD.

S. 184 Z. 12 v. u. ſt. Fg l. FG und ſt. FG l. Fg.

S. 209 Z. 15 v. o. ſt. Aequatorialprojection l. Aequatorealprojection.

Geometrie.

Einleitung.

§. 1. Erklärung.

Die Geometrie ist die Lehre von den räumlichen Größen. Diese sind von dreierlei Art: Körper, Flächen und Linien.

Der Körper ist ein begrenzter Raum, die Fläche ist die Grenze des Körpers und die Linie die Grenze der Fläche. Die Linie wird begrenzt von Punkten. —

Die drei genannten Größen: Körper, Fläche und Linie, unterscheiden sich durch die Anzahl ihrer Ausdehnungen; der Körper hat drei, die Fläche zwei, die Linie eine Ausdehnung. Der Punkt hat gar keine Ausdehnung und gehört daher auch überhaupt nicht zu den Größen.

Anm. Die Vorstellung des Raumes ist uns unmittelbar gegeben und daher weder einer Erklärung bedürftig, noch fähig.

§. 2. Erklärung.

Die Linien sind von zweierlei Art, grade und krumme.

Die Flächen sind ebenfalls von zweierlei Art, ebene und krumme. — Die ebene Fläche hat die Eigenschaft, daß sich auf derselben nach allen Seiten hin grade Linien so
daß sie ganz mit der Fläche zusammenfallen.

§. 3. Erklärung.

Die Geometrie zerfällt in zwei Theile: Planimetrie und Stereometrie. — Die Planimetrie ſtellt alle ihre Betrachtungen in einer Ebene an; die Stereometrie beſchränkt ſich nicht auf eine Ebene.

Erſte Abtheilung.
Planimetrie.

Erſter Abſchnitt.
Von den geraden Linien.

§. 4. Grundſatz.

1) Die Lage einer graden Linie iſt durch zwei Punkte gegeben, d. h. grade Linien, welche zwei Punkte gemeinſchaftlich haben, fallen zuſammen.

2) Wenn zwei grade Linien nur einen Punkt gemeinſchaftlich haben, ſo ſchneiden ſie ſich in dieſem Punkte; das heißt: jede theilt die andere in zwei Stücke, welche auf entgegengeſetzten Seiten der erſten Linie liegen.

Anm. So iſt in Fig. 1 DE im Punkte B in zwei Stücke getheilt, von denen das eine BE über, das andere BD unter AC liegt, und AC iſt im Punkte B in zwei Stücke getheilt, die zur rechten und linken Seite von DE liegen. Eine krumme und eine grade Linie oder zwei krumme Linien können aber auch in einem Punkte ſo zuſammen treffen, daß die Stücke der einen auf derſelben Seite der andern, z. B. beide oberhalb oder beide unterhalb (Fig. 2) liegen.

§. 5. Erklärung.

Grade Linien ſind entweder begrenzt oder unbegrenzt. — Begrenzte grade Linien ſind gleich (=), wenn ſie ſich ſo

auf einander legen lassen, daß ihre Endpunkte zusammenfallen. — Eine Linie ist grösser (>), als eine andere, wenn sie sich so zusammenlegen lassen, daß ein Paar Endpunkte auf einander fallen, der zweite Endpunkt der ersten aber über den zweiten Endpunkt der andern hinaus fällt. Eine Linie ist kleiner (<), als eine andere, wenn sie sich so auf einander legen lassen, daß ein Paar Endpunkte zusammenfallen, der zweite Endpunkt der ersten aber zwischen die beiden Endpunkte der andern fällt.

Anm. Man begreift leicht, daß die hier ausgesprochenen Erklärungen der Gleichheit und Ungleichheit mit den in der allg. Größenlehre §. 1 und 6 aufgestellten allgemeinen Erklärungen übereinstimmen, weshalb auch hier alle dort gezogenen Folgerungen gelten. — Dasselbe wird bei allen später auszusprechenden Erklärungen über „gleich und ungleich" der Fall sein, aber nicht jedesmal wieder besonders bemerkt werden. — Uebrigens ist es ebenso leicht, als dem Anfänger eine nützliche Uebung, wenn die angezeigten Folgerungen, was Summen und Differenzen betrifft, aus den so eben ausgesprochenen Erklärungen unmittelbar (durch Aufeinanderlegen) nachgewiesen werden.

§. 6. Grundsatz.

Die grade Linie ist die kürzeste Verbindung zweier Punkte.*)

Anm. 1. So ist (Fig. 3) AE kleiner, als AB, BC, CD, DE zusammengenommen, und ebenso (Fig. 4) AE < ABE. — Die krumme Linie läßt sich jedoch mit der graden nicht anders vergleichen, als daß man sich die krumme als aus unzähligen graden Stücken zusammengesetzt denkt.

Anm. 2. Wenn im Folgenden das Wort Linie ohne Beisatz gebraucht wird, so ist darunter vorzugsweise die grade Linie zu verstehen.

Zweiter Abschnitt.
Von den Winkeln.

§. 7. Erklärung.

Eine ebene Fläche, welche zwischen zwei Linien liegt, die in einem Punkte zusammenstoßen, nach der andern Seite hin unbe-

*) Ueber diesen Grundsatz vergl. §. 49 Anm. 2.

grenzt fortlaufen, heißt ein Winkel. Die Linien, welche den Winkel begrenzen, nennt man Schenkel; der Punkt, in welchem sie zusammenstoßen, heißt Scheitel. *)

Ein Winkel kann als dadurch entstanden gedacht werden, daß eine Linie, welche an einer Seite begrenzt, an der andern unbegrenzt ist, um ihren einen Endpunkt in einer Ebene gedreht wird.

§. 8. Erklärung.

Zwei Winkel sind gleich, wenn sie sich so auf einander legen lassen, daß ihre Scheitel und beide Paar Schenkel zusammenfallen. — Ein Winkel heißt größer, als ein anderer, wenn sie sich so auf einander legen lassen, daß die Scheitel und ein Paar Schenkel zusammenfallen, der zweite Schenkel des ersten Winkels aber über den zweiten Schenkel des andern Winkels hinausfällt. — Ein Winkel heißt kleiner, als ein anderer, wenn sie sich so auf einander legen lassen, daß ihre Scheitel und ein Paar Schenkel zusammenfallen, der zweite Schenkel des ersten Winkels aber zwischen die beiden Schenkel des andern Winkels fällt.

Anm. Vergl. die Anm. zu §. 5.

§. 9. Erklärung.

Ein Winkel, dessen beide Schenkel eine grade Linie bilden, heißt ein flacher und wird im Folgenden durch den Buchstaben π bezeichnet.

§. 10. Lehrsatz.

Alle flachen Winkel sind gleich.

Bew. Denn sie lassen sich so auf einander legen, daß Scheitel und Schenkel zusammenfallen.

§. 11. Erklärung.

Ein Winkel, welcher kleiner ist, als ein flacher, heißt ein hohler, und ein Winkel, der größer ist, als ein flacher, heißt ein erhabener.

*) Wie Winkel bezeichnet werden, wird mündlich mitgetheilt. Aehnliches gilt an mehreren andern Stellen.

§. 12. Erklärung.

Der 180ste Theil eines flachen Winkels heißt ein Grad (1°), der 60ste Theil eines Grades eine Minute (1′) und der 60ste Theil der Minute eine Secunde (1″). Demnach ist ein flacher W. = 180° = 10800′ = 648000″. *)

Anm. Wenn im Folgenden das Wort Winkel ohne Beisatz gebraucht wird, so ist in der Regel der hohle Winkel gemeint.

§. 13. Erklärung.

Zwei (hohle) Winkel, welche den Scheitel und einen Schenkel gemeinschaftlich haben, und deren beide andere Schenkel eine grade Linie bilden, heißen Nebenwinkel.

§. 14. Zusatz.

1) Zwei Nebenwinkel machen zusammen einen Flachen aus.

2) Gleiche Winkel haben gleiche Nebenwinkel.

3) Der größere Winkel hat einen kleinern Nebenwinkel.

Bew. Die erste Behauptung ist an sich klar, und aus dieser folgen (2) und (3); man kann aber auch (2) und (3) unmittelbar durch Aufeinanderlegen der Nebenwinkel nachweisen.

§. 15. Erklärung.

Zwei Winkel, welche nur den Scheitel gemeinschaftlich haben, und bei denen je zwei (gegenüberstehende) Schenkel eine gerade Linie bilden, heißen Scheitelwinkel.

§. 16. Lehrsatz.

Scheitelwinkel sind gleich.

*) Obgleich die obigen Benennungen früher von Bogen gebraucht und von diesen auf Winkel übertragen sind, so kann doch dieses historische Verhältniß für den Unterricht kein Hinderniß abgeben, jene Benennungen zuerst auf Winkel anzuwenden. Dieselben gewähren aber für die Unterredung über Winkel mit Anfängern viel mehr Bequemlichkeit und Anschaulichkeit, als die Bezeichnungsweise mit Brüchen, wie $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{1}{8}\pi$ oder $\frac{2}{3}$R, $\frac{2}{5}$R, $\frac{1}{4}$R u. dgl.

Bew. Denn sie bilden mit einem gemeinschaftlichen Nebenwinkel einen flachen. *)

§. 17. Erklärung.

Ein Winkel, welcher seinem Nebenwinkel gleich ist, heißt ein rechter und wird auch wohl durch den Buchstaben R bezeichnet. Alle andern (hohlen) Winkel heißen schiefe. —

Zwei Linien stehen auf einander senkrecht (⊥), wenn sie rechte, — schief, wenn sie schiefe Winkel bilden.

§. 18. Zusatz.

1) Der rechte Winkel ist die Hälfte des flachen und folglich müssen

2) alle rechten Winkel gleich sein, weil alle flachen Winkel als gleich erwiesen sind.

3) Daher läßt sich auf einer Linie in einem gegebenen Punkte nur ein Loth aufrichten.

§. 19. Erklärung.

Ein Winkel, welcher kleiner ist, als ein rechter, heißt ein spitzer, und ein Winkel, welcher größer ist, als ein rechter, ein stumpfer.

§. 20. Zusatz.

1) Zwei spitze Winkel sind zusammen kleiner, zwei stumpfe größer, als ein flacher.

2) Der spitze Winkel hat einen stumpfen, der stumpfe einen spitzen Nebenwinkel.

§. 21. Erklärung.

Wenn zwei Linien von einer dritten in zwei Punkten durchschnitten werden, so entstehen 8 (hohle) Winkel, welche man zunächst in innere (c, d, e, f Fig. 5.) und äußere (a, b, g, h)

*) Der Schüler hat dieses an einer Figur ausführlich zu erörtern. — Aehnliches gilt an andern Stellen.

eintheilen kann. Ferner werden je zwei Winkel, welche auf derſelben Seite der ſchneidenden Linie und der durchſchnittenen Linien liegen (wie a u. e, c u. g, b u. f, d u. h), gleichliegende Winkel oder Gegenwinkel genannt; zwei innere Winkel, welche an entgegengeſetzter Seite der ſchneidenden Linie und der durchſchnittenen Linien liegen (wie c u. f und e u. d), heißen (innere) entgegengeſetzte oder Wechſelwinkel; endlich werden zwei innere Winkel, welche an derſelben Seite der ſchneidenden Linie, aber an entgegengeſetzter Seite der durchſchnittenen Linien liegen (wie c u. e und d u. f), (innere) gegenüberſtehende Winkel genannt.

Anm. Obgleich von äußern entgegengeſetzten (a u. h und b u. g) und gegenüberſtehenden (a u. g und b u. h) Winkeln im Weſentlichen dieſelben Beſtimmungen gelten, wie von innern, ſo wird doch im Folgenden der Kürze wegen nur von den innern die Rede ſein.

§. 22. Lehrſatz.

Wenn zwei Linien von einer dritten in zwei Punkten durchſchnitten werden, und ein Paar gleichliegende Winkel (Gegenw.) gleich ſind, ſo ſind auch die drei andern Paar gleichliegenden Winkel, die zwei Paar entgegengeſetzten (Wechſelw.) und die zwei Paar gegenüberſtehenden Winkel gleich.

Die Beweiſe folgen ſehr leicht aus §. 14 u. 16.

§. 23. Zuſatz.

Sind ein Paar entgegengeſetzte Winkel (Wechſelw.) gleich, ſo ſind die beiden andern entgegengeſetzten Winkel auch gleich, ferner die vier Paar gleichliegenden Winkel (Gegenw.) ſind gleich, und je zwei gegenüberſtehende Winkel machen zuſammen einen Flachen.

Bew. Hier braucht nur die Gleichheit von ein Paar gleichliegenden Winkeln, die leicht aus §. 16 hervorgeht, erwieſen zu werden; dann ergeben ſich alle andern Folgerungen aus dem letzten Lehrſatze.

§. 24. Zuſatz.

Wenn ein Paar gegenüberſtehende Winkel zuſammen einen Flachen ausmachen, ſo beträgt auch das andere Paar einen Fla-

chen und die vier Paar gleichliegenden (Gegenw.) und die zwei Paar entgegengesetzten Winkel (Wechselw.) sind gleich.

Bew. Aus der Voraussetzung läßt sich leicht mit Hülfe von §. 14 die Gleichheit von ein Paar gleichliegenden Winkeln herleiten, und dann folgt wieder alles Andere aus dem letzten Lehrsatze.

Dritter Abschnitt.
Von den parallelen Linien.

§. 25. Erklärung und Grundsatz.

Zwei Linien, welche sich schneiden, haben eine verschiedene oder abweichende Richtung, und die Größe dieser Abweichung wird durch den Winkel dargestellt, welchen die Linien mit einander bilden. — Zwei unbegrenzte Linien dagegen, welche (in derselben Ebene liegen und) sich nicht schneiden, haben eine gleiche Richtung und heißen parallel.

§. 26. Zusatz.

1) Zwei Linien, welche einer dritten parallel sind, sind auch unter sich parallel.

2) Eine Linie, welche die eine von zwei parallelen Linien schneidet, muß auch die andere schneiden.

3) Durch einen Punkt außerhalb einer Linie lassen sich mit derselben nicht zwei parallele Linien ziehen.

Bew. Die Richtigkeit dieser Behauptungen ergiebt sich unmittelbar aus dem vorherg. §.

§. 27. Lehrsatz.

Wenn zwei parallele Linien von einer dritten geschnitten werden, so sind die gleichliegendeu Winkel (Gegenw.) gleich.

Bew. Linien mit gleicher Richtung müssen auch von jeder dritten auf gleiche Weise abweichen u. s. w.

§. 28. Zuſatz.

Bei parallelen Linien ſind auch die entgegengeſetzten Winkel (Wechſelw.) gleich und die gegenüberſtehenden Winkel machen zuſammen einen Flachen aus.

Der Beweis iſt in §. 22 u. 27 enthalten.

§. 29. Lehrſatz.

Wenn zwei Linien von einer dritten in zwei Punkten durchſchnitten werden, und ein Paar gleichliegende Winkel (Gegenw.) gleich ſind, ſo ſind die Linien parallel.

Bew. Linien, welche von einer dritten auf gleiche Weiſe abweichen, müſſen gleiche Richtung haben u. ſ. w.

§. 30. Zuſatz.

Zwei Linien ſind auch dann gewiß parallel, wenn ein Paar entgegengeſetzte Winkel (Wechſelw.) gleich ſind, oder wenn ein Paar gegenüberſtehende Winkel zuſammen einen Flachen ausmachen.

Der Beweis iſt in §. 23, 24 u. 29 enthalten.

§. 31. Lehrſatz.

Wenn zwei ſich ſchneidende Linien von einer dritten in zwei Punkten durchſchniten werden, ſo betragen die gegenüberſtehenden Winkel auf der Seite, auf welcher ſich die Linien ſchneiden, weniger, die auf der andern Seite mehr, als einen Flachen.

Der Beweis wird geführt, indem man durch den Durchſchnittspunkt der einen Linie mit der dritten eine Linie zieht, welche der andern parallel läuft, und dann §. 28 anwendet.

§. 32. Lehrſatz.

Wenn zwei Linien von einer dritten in zwei Punkten geſchnitten werden, und ein Paar gegenüberſtehende Winkel zuſammen weniger, als einen Flachen ausmachen, ſo ſchneiden ſich die Linien und zwar auf der Seite, auf welcher dieſe Winkel liegen

Bew. Wenn $BEF + EFD < \pi$ (Fig. 6) iſt, ſo ſchneiden ſich die Linien AB und CD ſchneiden und zwar hier

gur auf der rechten Seite. Denn parallel können die Linien nicht sein, weil sonst nach §. 28 die Winkel BEF und EFD gerade einen Flachen ausmachen müßten; auf der linken Seite können sie sich auch nicht schneiden, denn sonst müßten diese Winkel nach dem letzten Satze mehr, als einen Flachen ausmachen; sie sind aber kleiner, als ein Flacher vorausgesetzt. Folglich bleibt nichts weiter übrig, als daß sich die Linien auf der rechten Seite schneiden.

§. 33. Zusatz.

1) Zwei Linien, welche auf einer dritten senkrecht stehen, sind parallel, und

2) wenn zwei Linien parallel laufen, und die eine auf einer dritten senkrecht steht, so ist auch die andere ein Loth auf der dritten.

3) Wenn zwei Linien parallel laufen, und man errichtet auf jeder ein Loth, so sind die Lothe ebenfalls parallel, und

4) wenn zwei Linien sich schneiden, und man errichtet auf jeder ein Loth, so schneiden sich auch die Lothe.

5) Aus einem Punkte außerhalb einer Linie läßt sich auf dieselbe nur ein Loth fällen.

Bew. (1) und (2) folgen leicht beziehlich aus §. 29 u. 27; aus (1) und (2) ergiebt sich (3) und hieraus indirect (4). Sind nehmlich (Fig. 7) DE und FG senkrecht auf den sich schneidenden AB und BC, so müssen sich auch die Lothe ED und FG schneiden. Denn gesetzt sie schnitten sich nicht, sondern liefen parallel, so müßten nach (3) auch AB und BC parallel laufen, weil man sich dieselben als Lothe auf ED und FG errichtet denken kann. AB und BC sind aber nicht parallel, sondern schneiden sich in B; folglich können auch ED und FG nicht parallel sein, sondern müssen sich ebenfalls schneiden.

Endlich folgt (5) leicht aus (1); denn da zwei Lothe auf einer dritten Linie parallel sind, und zwei parallele Linien nicht von einem Punkte ausgehen können, so lassen sich auch aus einem Punkte nicht zwei Lothe auf eine Linie fällen.

§. 34. Zuſatz.

Winkel, welche parallele Schenkel haben und ſich nach einer Seite hin öffnen, ſind gleich.

Bew. Die Gleichheit der gegebenen Winkel folgt ſehr leicht, wenn man ſie mit dem Winkel vergleicht, unter welchem ſich die beiden innern Schenkel ſchneiden, oder mit dem Winkel, welchen die beiden äußern Schenkel bilden, wenn man ſie bis zum Durchſchnitt verlängert, oder wenn man die Winkel zu Hülfe nimmt, die entſtehen, wenn man beide Scheitelpunkte verbindet.

Anm 1. Gehen die parallelen Schenkel vom Scheitelpunkte beide nach entgegengeſetzter Richtung (Fig. 8), ſo ſind die Winkel (a u. b) ebenfalls gleich, weil der Scheitelwinkel (c) des einen (b) dem andern gegebenen Winkel (a) nach dem eben Bewieſenen gleich iſt. Wenn aber ein Paar Schenkel vom Scheitel aus nach derſelben, die beiden andern nach entgegengeſetzter Richtung gezogen ſind (Fig. 9), ſo ergänzen ſich die beiden Winkel (a u. b) zu einem Flachen; denn der eine (a) iſt nach dem Obigen dem Nebenwinkel (c) des andern (b) gleich.

Anm. 2. Von den vorſtehenden Sätzen ſind §. 27 und 29, welche die Grundlage der Lehre von dem Parallelen bilden, nicht ganz ſtreng erwieſen. Die dort angedeuteten Beweiſe beziehen ſich auf den Grundſatz §. 25, in welchem eigentlich jene Sätze ſchon enthalten ſind; denn „gleiche Richtung haben", will wohl ſtreng genommen nichts anders ſagen, als mit jeder ſchneidenden Linie gleiche gleichliegende Winkel bilden. Wenn aber jener Ausdruck unbedingt zuläßig ſein ſoll, ſo muß vor Allem gezeigt werden, daß wenn zwei Linien mit einer ſchneidenden gleiche gleichliegende Winkel bilden, daſſelbe auch von jeder andern ſchneidenden gelten muß. — Nun läßt ſich allerdings §. 29 auch ganz ſtreng erweiſen. Denn iſt **EFB = EGD** (Fig. 10), ſo iſt nach §. 22 auch **AFG = FGD** und **CGF = GFB**. Es läßt ſich daher die Linienverbindung **BFGD** mit **CGFA** ſo zuſammenlegen, daß **FG** auf **GF**, nehmlich **F** auf **G** und **G** auf **F**, **BF** auf **CG** und **DG** auf **AF** fällt. Schnitten ſich nun die Stücke **AF** und **CG**, ſo müßten ſich auch **FB** und **GD** (in dem nehmlichen Punkte) ſchneiden. Dann ſchnitten ſich aber die ganzen Linien **AB** und **CD** in zwei Punkten, welches unmöglich iſt. Folglich können ſich die Stücke **AF** und **CG** nicht ſchneiden; daſſelbe gilt von **FB** und **GD**, und die Linien **AB** und **CD** ſind alſo parallel. — Dagegen iſt es bis jetzt, trotz der vielfachſten Verſuche, nicht gelungen, den andern Satz §. 27 ſtreng zu erweiſen. Es würde aber ein ſolcher Beweis ſich wesentlich auf den Begriff der graden Linie zu ſtützen haben, für dieſe keine genügende Erklärung vorhanden iſt, auch [illegible] vorhanden ſein kann, da die grade Linie ein einfacher,

gegebener Begriff iſt, ſo läßt ſich ziemlich ſicher annehmen, daß auch in Zukunft kein ganz ſtrenger Beweis für jenen Satz gefunden werden dürfte. — Ein ſolcher kann aber auch recht füglich entbehrt werden; denn jene Behauptungen können als unmittelbar mit der Vorſtellung der graden Linie gegeben angeſehen werden, ſo wie es auch noch Niemanden eingefallen iſt, ernſtlich an der Wahrheit jener Sätze zu zweifeln. — (Uebrigens iſt Alles mathematiſche Forſchen und Schließen doch nur ein hypothetiſches, und handelt es ſich dabei mehr um das Erforſchen der Wahrheit, als um die Wahrheit ſelbſt.) — Aus den beiden angezogenen Sätzen §. 29 u. 27 folgt aber zunächſt §. 26 und dann die übrigen Sätze ebenſo, wie ſie oben aus jenen Hauptſätzen abgeleitet ſind. —

Vierter Abſchnitt.
Von den gradlinigen Figuren.

§. 35. Erklärung.

Eine überall begrenzte (ebene) Fläche heißt eine (ebene) Figur. Die Figuren ſind von dreierlei Art, gradlinige, wenn ſie von graden, krummlinige, wenn ſie von krummen, gemiſchtlinige, wenn ſie von graden und krummen Linien eingeſchloſſen werden. — Die graden Linien, welche eine gradlinige Figur begrenzen, heißen Seiten, alle Seiten zuſammen Umfang (Perimeter). Die Punkte, in denen zwei Seiten zuſammenſtoßen, werden die Ecken der Figur genannt.

Bemerk. Daß jede gradlinige Figur eben ſo viel Ecken, als Seiten hat, leuchtet von ſelbſt ein, und aus §. 4, 1. folgt, daß zwei grade Linien nicht hinreichen können, eine Figur zu begrenzen.

§. 36. Erklärung.

Die gradlinigen Figuren benennt man nach der Anzahl ihrer Seiten oder Ecken Dreiecke, Vierecke, Fünfecke u. ſ. w. — Alle führen den gemeinſchaftlichen Namen Vielecke oder Polygon.

Ein Vieleck heißt regelmäßig (regulär), wenn es lauter gleiche Seiten und Winkel hat.

A. Vom Dreieck.

§. 37. Erklärung.

Das Dreieck wird wieder verschieden benannt: — zunächst in Hinsicht seiner Seiten — gleichseitig, wenn es drei gleiche Seiten hat, gleichschenklig, wenn zwei Seiten gleich sind, — die dritte Seite heißt dann Basis oder Grundlinie und die gegenüberliegende Ecke Spitze, — ungleichseitig, wenn keine Seite der andern gleich ist.

§. 38. Lehrsatz.

1) Die Summe zweier Seiten im Dreieck ist allemal größer, als die dritte.

2) Der Unterschied zweier Seiten eines Dreiecks ist kleiner, als die dritte Seite.

Bew. Die Richtigkeit des ersten Satzes folgt unmittelbar aus dem Grundsatze §. 6, und aus (1) ist (2) leicht abzuleiten.

Anm. Man kann indeß den vorstehenden Lehrsatz auch streng erweisen (vergl. die Anm. 2 zu §. 49) ohne Benutzung des angeführten Grundsatzes, der in soweit als entbehrlich erscheint.

*§. 39. Zusatz.

1) Wenn man die Endpunkte einer graden Linie durch zwei gebrochene Linien so verbindet, daß diese mit der geraden Linie Vielecke bilden, in denen alle Winkel hohle sind, so ist die äußere gebrochene Linie größer, als die innere eingeschlossene.

Bew. Verlängere (Fig. 11) AC, CD, DE bis zum Einschnitt in die äußere Linie; dann ist die gebrochene Linie ACDEB < ACDMB, weil EB < EMB ist; ferner ebenso ACDMB < ACLB, weil DM < DLM ist; desgleichen ACLB < AHGB, weil CL < CHGL ist, und endlich AHGB < AFGB, weil AH < AFH ist. Demnach ist auch ACDEB < AFGB.

2) Sind die Endpunkte einer graden Linie durch zwei krumme Linien verbunden, welche beide ihre hohlen Seiten gegen die grade wenden, so ist die äußere ebenfalls größer, als die innere eingeschlossene. —

So ist ACB < ADB (Fig. 12), wie aus (1) folgt, wenn man sich beide krumme Linien als gebrochene denkt, die aus unzähligen graden Stücken bestehen.

3) Dieselben Beziehungen finden auch unter den angegebenen Voraussetzungen zwischen einer gebrochenen und einer krummen Linie statt. —

So ist (Fig. 13) ADEFB > ACB, aber < AGB.

§. 40. Lehrsatz.

Die drei Winkel eines Dreiecks machen zusammen einen Flachen aus.

Bew. Zieht man durch eine Ecke mit der gegenüberstehenden Seite eine Parallele, so folgt die Richtigkeit des Satzes aus §. 28.

§. 41. Zusatz.

1) Sind von einem Dreieck zwei Winkel gegeben, so ist hierdurch auch der dritte bestimmt; dieser wird nehmlich gefunden, wenn man die beiden gegebenen Winkel addirt und ihre Summe von einem Flachen subtrahirt.

2) Ist in einem Dreieck ein Winkel ein rechter, so betragen die beiden andern zusammen auch einen rechten, und folglich ist jeder spitz.

3) Hat ein Dreieck einen stumpfen Winkel, so kommt auf die beiden andern weniger, als ein rechter; um so mehr muß jeder einzelne spitz sein.

4) Bilden zwei Linien mit einander schiefe Winkel, und man fällt aus einem Punkte der einen ein Loth auf die andere, so muß dieses auf die Seite des spitzen Winkels fallen.

Bew. zu (4). Ist Winkel ACD (Fig. 14) spitz, so kann ein aus E auf BD gefälltes Loth nicht auf die Seite des stumpfen Winkels ACB, etwa nach EF fallen, weil sonst ein Dreieck EFC mit einem stumpfen Winkel ECF und einem rechten Winkel EFC entstehen würde.

§. 42. Erklärung.

Ein Dreieck mit einem rechten Winkel heißt rechtwinklig, mit einem ſtumpfen Winkel ſtumpfwinklig, und wenn alle drei Winkel ſpitz ſind, ſo heißt das Dreieck ſpitzwinklig. — Im rechtwinkligen Dreieck heißt die Seite, welche dem rechten Winkel gegenüber liegt, Hypotenuſe (ὑποτεινουσα von ὑποτεινω = subtendo), und die Seiten, welche den rechten Winkel einſchließen, werden Catheten genannt.

§. 43. Erklärung.

Im Dreieck nennt man auch wohl irgend eine Seite die Grundlinie und die beiden andern Seiten vorzugsweiſe Seiten; ein Loth aus der gegenüberſtehenden Ecke, welche die Spitze genannt wird, auf die Grundlinie (oder ihre Verlängerung) gefällt, heißt dann die Höhe des Dreiecks.

§. 44. Zuſatz.

Die Höhe fällt innerhalb des Dreiecks, wenn die Winkel an der Grundlinie beide ſpitz ſind, außerhalb, wenn ein Winkel an der Grundlinie ſtumpf iſt, und mit einer Seite zuſammen, wenn an der Grundlinie ein rechter Winkel liegt.

Der Beweis iſt in §. 41, 4 enthalten.

§. 45. Zuſatz.

Wenn man in einem Dreieck eine Seite verlängert, ſo iſt der entſtandene Außenwinkel ſo groß, als die beiden innern gegenüberliegenden zuſammen und alſo größer, als jeder allein.

Der Beweis folgt aus §. 40 u. 14.

§. 46. Lehrſatz.

Im gleichſchenkligen Dreieck ſind die Winkel an der Grundlinie gleich.

Bew. Die Richtigkeit des Satzes fällt in die Augen, wenn man ſich das Dreieck ſo umgelegt denkt, daß die Spitze liegen bleibt, und die gleichen Seiten ihre Lage vertauſchen.

§. 47. Zuſatz.

1) Im gleichſchenkligen Dreieck ſind die Winkel an der Grundlinie ſpitz (weil in einem Dreieck nie zwei rechte oder zwei ſtumpfe Winkel vorkommen können).

2) Im gleichſeitigen Dreieck ſind alle drei Winkel gleich, weil jede Seite als Grundlinie gelten kann; es beträgt daher jeder W. 60°, und das gleichſeitige Dreieck iſt eine regelmäßige Figur.

§. 48. Lehrſatz.

Iſt in einem Dreieck eine Seite größer, als eine andere, ſo liegt der größern Seite auch ein größerer Winkel gegenüber.

Bew. Man denke ſich das Dreieck eben ſo umgelegt, wie in §. 46, und wende §. 45 an.

§. 49. Lehrſatz.

1) Sind in einem Dreieck zwei Winkel gleich, ſo ſind auch die gegenüberſtehenden Seiten gleich, und das Dreieck iſt folglich gleichſchenklig.

2) Iſt in einem Dreieck ein Winkel größer, als ein anderer, ſo liegt dem größern Winkel auch eine größere Seite gegenüber.

Bew. 1) Iſt W. $A=B$ (Fig. 15), ſo iſt auch $AC=BC$; denn wenn $AC>BC$ wäre, ſo müßte nach dem letzten Satze auch $B>A$ ſein, und wenn $AC<BC$ wäre, ſo müßte $B<A$ ſein. Beides iſt gegen die Vorausſetzung, folglich muß $AC=BC$ ſein.

2) Iſt W. $A>B$ (Fig. 16), ſo kann nicht $BC=AC$ ſein, weil ſonſt auch $A=B$ ſein müßte; — zweitens kann auch nicht $BC<AC$ ſein; denn ſonſt müßte $\angle B<A$ ſein. Beides widerſpricht der Vorausſetzung; alſo bleibt nichts anderes übrig, als daß $BC>AC$ iſt.

Anm. 1. Der vorhergehende Satz läßt ſich auch ganz leicht direct erweiſen, nehmlich (1), wenn man das Dreieck ſo umlegt, daß die Endpunkte der Grundlinie ihre Lage vertauſchen; (2) ebenſo mit Hülfe von §. 38, oder wenn man den kleinern Winkel vom größern abſchneidet und (1) u. §. 38 anwendet.

Anm. 2. In §. 6 hat man als Grundſatz die Behauptung hingeſtellt: Die grade Linie iſt die kürzeſte Verbindung zweier Punkte.

Dieser Satz ist jedoch allerdings noch eines Beweises fähig, und wenn man ganz streng verfahren will, wird man sich nicht erlauben dürfen, einen Satz, der sich erweisen, d. h. auf andere zurückführen läßt, als Grundsatz oder als sich von selbst verstehend anzunehmen. Die vorhergehenden Sätze lassen sich aber, wie man gesehen hat, sämmtlich ohne Zuziehung jenes Grundsatzes erweisen, mit Ausnahme von §. 38: „die Summe zweier Seiten ist größer, als die dritte" und des zugehörigen Zusatzes §. 39. Dieser Satz (§. 38) kann indeß leicht ganz streng erwiesen und aus demselben der angeführte Grundsatz (§. 6) abgeleitet werden. Will man nehmlich zeigen, daß $AC+CB>AB$ ist (Fig. 17. a), so mache man $CD=CB$ und ziehe BD; dann ist $\angle CBD=D$, folglich $\angle ABD>D$ und daher in $\triangle ABD$ Seite $AD>AB$ oder $AC+CB>AB$. — Hieraus folgt nun aber äußerst leicht weiter, daß die gerade Linie AB (Fig. 17. b) kürzer ist, als jede gebrochene $ACDEB$ zwischen den Punkten A und B; denn es ist nach dem eben Bewiesenen $AB<AE+EB<AD+DE+EB<AC+CD+DE+EB$. Demnach ist auch die grade Linie kürzer, als die krumme zwischen denselben Punkten und daher überhaupt die kürzeste Verbindung zweier Punkte. Will man also möglichst streng verfahren und die Behauptung in §. 6 nicht als Grundsatz zulassen, so hat man nach dem eben Bemerkten, weiter nichts nöthig, als die vorhergehenden Sätze etwas anders zu ordnen, nehmlich so: zunächst, wie in der vorliegenden Schrift, §. 1 bis 5, dann (mit Auslassung von §. 6) §. 7 bis 37, ferner (mit vorläufiger Uebergehung von §. 38 und 39) §. 40 bis 49, dann §. 38 und als Folgerung aus diesem, nicht als Grundsatz, §. 6 und endlich §. 39, so daß also nur §. 6, 38 und 39 ihre Stelle zu verändern brauchen. Die Folge der spätern Sätze kann dieselbe bleiben, wie im Buche.

§. 50. Zusatz.

1) Im rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse größer, als jede Cathete.

2) Im stumpfwinkligen Dreieck ist die Seite am größten, welche dem stumpfen Winkel gegenüber liegt.

3) Die Winkel an der größten Seite eines Dreiecks sind allemal spitz.

§. 51. Erklärung.

Zwei Figuren heißen congruent ($\cong$), wenn sie sich so zusammenlegen lassen, daß ihre Grenzen sich decken.

§. 52. Lehrsatz.

Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie in zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, und es

sind dann auch die übrigen gleichliegenden Seiten und Winkel in beiden gleich groß.

Bew. Dieser und der folgende Satz werden durch Aufeinanderlegen der Dreiecke erwiesen.

Anm. Zur Uebung können, ganz wie der vorstehende Satz, auch folgende erwiesen werden: Zwei Vierecke sind congruent, wenn sie in drei Seiten und den eingeschlossenen Winkeln, zwei Fünfecke, wenn sie in vier Seiten und den dazwischenliegenden Winkeln übereinstimmen u. dgl. m.

§. 53. Lehrsatz.

Zwei Dreiecke sind ferner congruent, wenn sie in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen, und es sind dann auch die übrigen gleichliegenden Seiten und Winkel in beiden gleich groß.

§. 54. Zusatz.

Zwei Dreiecke sind auch dann congruent, wenn sie in einer Seite, einem anliegenden und dem gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen.

Bew. Dieser Satz läßt sich mit Hülfe von §. 40 leicht auf den vorherg. zurückführen.

Bem. Die einfachsten Stücke, welche ein Dreieck bestimmen, sind zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel; dieß sind auch die einzigen drei Stücke, welche ganz willkührlich angenommen werden können und doch jedesmal wirklich ein Dreieck bilden. — Läßt man zwei von diesen Stücken ungeändert und ändert das dritte, so wird auch im Allgemeinen die fehlende Seite sich ändern und gleichzeitig mit dem veränderlichen Stücke zu- und abnehmen; doch gilt dieß unbedingt nur dann, wenn man den Winkel wachsen oder abnehmen und die einschließenden Seiten ungeändert läßt. Diese Bemerkung führt zu dem folgenden Satze, aus dem sich dann ein dritter Congruenzfall ergiebt.

§. 55. Lehrsatz.

Sind in zwei Dreiecken je zwei Seiten gleich, die eingeschlossenen Winkel aber ungleich, so liegt dem größern Winkel auch eine größere Seite gegenüber.

Bew. Ist in Fig. 18 $\angle A < D$, so sind B und C zusammen gewiß größer, als E und F, folglich, wenn man B mit E und C mit F vergleicht, wenigstens einer von jenen gewiß größer, als einer von diesen; es sei hier $C > F$, dann lassen sich die Dreiecke so zusammen legen, daß $\triangle DEF$ durch $\triangle AGC$ vorgestellt wird, wo sich dann das Weitere leicht ergiebt, wenn man auf die Dreiecke AHG und BHC §. 38 anwendet.

§. 56. Lehrsatz.

Zwei Dreiecke sind auch dann congruent, wenn sie in den drei Seiten übereinstimmen.

Der Beweis folgt sehr leicht indirect aus dem vorherg. §. und §. 52.

§. 57. Lehrsatz.

Sind in zwei Dreiecken je zwei Seiten gleich, die dritten Seiten aber ungleich, so liegt der größern Seite auch ein größerer Winkel gegenüber.

Bew. Es sei (Fig. 18) $AB = DE$, $AC = DF$, $BC < EF$, so ist auch $\angle A < D$. Denn wenn $A = D$ wäre, so stimmten die Dreiecke in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein und müßten folglich congruent, also auch $BC = EF$ sein.

Wenn zweitens $A > D$ wäre, so müßte nach dem vorletzten Satze $BC > EF$ sein. — Das Eine wie das Andere widerspricht der Voraussetzung; also kann nur $A < D$ sein.

*§. 58. Lehrsatz.

Wenn zwei Dreiecke in zwei Seiten und einem Winkel an der dritten Seite übereinstimmen, so sind entweder auch die beiden andern Winkel an der dritten Seite gleich und die Dreiecke folglich congruent, oder diese beiden Winkel sind ungleich und ergänzen sich zu einem Flachen.

Bew. Daß zunächst die Dreiecke unter den angegebenen Voraussetzungen congruent sein können, ist an sich klar. Man wird daher umgekehrt zu zeigen haben, daß Dreiecke möglich sind, welche in den angegebenen Stücken übereinstimmen, ohne con-

gruent zu sein. Hiervon überzeugt man sich indeß außerordentlich leicht, wenn man in einem gleichschenkligen Dreiecke ABC (Fig. 19) die Grundlinie AC verlängert und irgend einen Punkt D der Verlängerung mit der Spitze B verbindet. Dann haben die Dreiecke BCD und BAD die Seite BD und den Winkel D gemeinschaftlich, und die Seite AB ist = BC; sie stimmen also in zwei Seiten und einem Winkel an der dritten überein, sind aber doch nicht congruent. Auch sieht man noch leicht, daß die beiden andern Winkel an der dritten Seite BAD und BCD sich zu einem Flachen ergänzen, indem $\angle BCD = BAC$ und $BAC + BAD = \pi$ ist. — Endlich ist noch zu zeigen, daß dieses Letztere allemal statt finden muß, wenn in zwei nicht congruenten Dreiecken zwei Seiten und ein Winkel an der dritten Seite gleich sind. Es seien hierzu die Dreiecke DCB und EFG gegeben; in diesen sei $EG = BD$, $FG = BC$, $\angle E = D$. Da sie nicht congruent sein sollen, so müssen offenbar die dritten Seiten EF und DC ungleich sein; es sei hier $EF < DC$. Dann lassen sich die beiden Dreiecke so zusammenlegen, daß ΔEFG durch DAB und insbesondere $\angle EFG$ durch $\angle DAB$ vorgestellt wird, woraus denn nach dem vorher Bewiesenen $\angle EFG + DCB = \pi$ hervorgeht.

* §. 59. Zusatz.

Wenn zwei Dreiecke in zwei Seiten und einem Winkel an der dritten Seite übereinstimmen und dieser Winkel der größern der beiden gegebenen Seiten gegenüberliegt, so sind die Dreiecke gewiß congruent; — denn die der kleinern Seite gegenüberliegenden Winkel sind nothwendig spitz und können folglich zusammen keinen Flachen ausmachen.

§. 60. Zusatz.

Zwei rechtwinklige Dreiecke sind schon dann congruent, wenn sie übereinstimmen

1) in den beiden Catheten (§. 52);
2) in der Hypotenuse und einem anliegenden Winkel (§. 54);
3) in einer Cathete und dem gegenüberliegenden Winkel (§. 54);

4) in einer Cathete und dem anliegenden spitzen Winkel (§. 53).

§. 61. Lehrsatz.

1) Wenn in zwei rechtwinkligen Dreiecken ein Paar Catheten gleich sind, die zweite Cathete des ersten aber größer ist, als die zweite Cathete des andern, so ist auch die Hypotenuse im ersten Dreieck größer, als im andern.

2) Wenn in einem rechtwinkligen Dreiecke beide Catheten größer sind, als im andern, so ist auch die Hypotenuse im ersten größer, als im andern.

Bew. 1) Man lege die Dreiecke so zusammen, daß die gleichen Catheten und die rechten Winkel sich decken und benutze §. 49, 2. —

(2) folgt sehr leicht aus (1).

§. 62. Lehrsatz.

1) Wenn zwei rechtwinklige Dreiecke in der Hypotenuse und einer Cathete übereinstimmen, so sind auch die beiden andern Catheten gleich groß, und die Dreiecke sind folglich congruent.

2) Wenn zwei rechtwinklige Dreiecke eine gleiche Hypotenuse haben, aber eine Cathete des einen größer ist, als eine Cathete des andern, so ist dagegen die zweite Cathete des ersten Dreiecks kleiner, als die zweite Cathete des andern.

Beweis. Beides folgt sehr leicht indirect aus dem vorherg. §. (Außerdem ist (1) ein besonderer Fall von §. 59).

§. 63. Lehrsatz.

1) Unter allen Linien, welche sich zwischen einer gegebenen Linie und einem außerhalb gegebenen Punkte ziehen lassen, ist das Loth am kleinsten und heißt daher der Abstand des Punktes von der Linie.

2) Die Verbindungslinien sind gleich, wenn ihre Endpunkte gleichweit zu beiden Seiten vom Endpunkte des Lothes abstehen.

3) Sie werden um so größer, je weiter sich ihre Endpunkte von dem des Lothes entfernen.

Die Beweise folgen äußerst leicht aus §. 50, 52 und 61.

B. Vom Viereck.

§. 64. Erklärung.

Eine Linie, welche zwei Ecken eines Vielecks verbindet, die nicht in derselben Seite liegen, heißt eine Diagonale.

§. 65. Satz.

Sind in einem Viereck alle Winkel hohl, so liegen beide Diagonalen innerhalb. Ist aber ein Winkel eines Vierecks ein erhabener, so fällt eine Diagonale innerhalb, eine außerhalb.

§. 66. Lehrsatz.

Alle Winkel eines Vierecks machen zusammen zwei Flache aus.

Bew. Dieß folgt äußerst leicht aus §. 40, wenn man das Viereck durch eine innerhalb fallende Diagonale in zwei Dreiecke zerschneidet.

Anm. Wenn in einem Vieleck alle Winkel hohle sind, so läßt sich dasselbe durch Diagonalen, aus einer Winkelspitze gezogen, in Dreiecke zerschneiden; und man findet dann, daß alle Winkel im Fünfeck zusammen drei Flache, im Sechseck vier Flache, im Siebeneck fünf Flache und überhaupt in jedem Vieleck zwei Flache weniger betragen, als das Vieleck Seiten hat.

§. 67. Lehrsatz.

Zwei Vierecke sind congruent:

1) wenn sie in drei Seiten und den beiden eingeschlossenen Winkeln übereinstimmen;

2) wenn sie in drei Winkeln und den beiden zwischenliegenden Seiten übereinstimmen.

Die Beweise werden ebenso geführt, wie bei §. 52 u. 53.

Anm. Auf ganz gleiche Weise läßt sich zeigen, daß überhaupt zwei Vielecke congruent sind, wenn alle Seiten bis auf eine — und die eingeschlossenen Winkel — oder alle Winkel bis auf einen — und die zwischenliegenden Seiten in dem einen der Reihe nach so groß sind, als im andern, indem durch die gegebenen Stücke auch die drei fehlenden (im ersten Fall eine Seite und die beiden anliegenden Winkel, im andern ein Winkel und die einschließenden Seiten) bestimmt werden. Dieß sind jedoch nicht die beiden einzigen Fälle, in denen sich zwei Vielecke als congruent erweisen lassen. Da nehmlich ein neck

n Seiten und n Winkel, alſo im Ganzen 2n Stücke hat, ſo ſind im Allgemeinen zwei necke dann congruent, wenn ſie in 2n — 3 Stücken übereinſtimmen; es treten aber hier eben ſolche zweideutige Fälle ein, wie für das Dreieck in §. 58 angegeben ſind, aber für Vielecke mit größerer Seitenzahl häufiger und verwickelter. Die Unterſuchung über die zu erweiſende Congruenz läßt ſich jedoch allemal auf Sätze vom Dreieck zurückführen, indem man die Vielecke in Dreiecke zerſchneidet. Deshalb ſind auch nur die beiden Congruenzfälle des vorherg. §, die am häufigſten Anwendung finden, hier aufgenommen.

§. 68. Erklärung.

Ein Viereck, in welchem die gegenüberſtehenden Seiten parallel laufen, heißt ein Parallelogramm.

§. 69. Lehrſatz.

Das Parallelogramm wird durch die Diagonale in zwei congruente Dreiecke getheilt, und es ſind daher in jedem Parallelogramm die gegenüberſtehenden Seiten und Winkel gleich.

Der Beweis folgt aus §. 28 u. 53.

§. 70. Zuſatz.

Iſt im Parallelogramm ein Winkel ein rechter, ſo ſind ſie alle rechte.

Der Beweis folgt unter andern aus §. 66 u. 69.

§. 71. Lehrſatz.

Sind in einem Viereck die gegenüberſtehenden Seiten gleich, ſo ſind ſie auch parallel, und das Viereck iſt alſo ein Parallelogramm.

Bew. Ziehe eine Diagonale und benutze §. 56 u. 30.

§. 72. Lehrſatz.

Sind in einem Viereck zwei Seiten parallel und gleich, ſo ſind auch die beiden andern Seiten parallel und gleich, und das Viereck iſt folglich ein Parallelogramm.

Bew. Ziehe eine Diagonale und wende §. 28, 52 u. 30 an

§. 73. Zusatz.

1) Parallelen zwischen Parallelen sind gleich.

2) Lothe zwischen Parallelen sind gleich; es haben daher parallele Linien in allen Punkten gleichen Abstand von einander.

3) Wenn drei Punkte von einer geraden Linie gleichen Abstand haben, so liegen sie selbst in einer geraden Linie, die mit der gegebenen Linie parallel läuft.

Die Beweise von (1) und (2) sind sehr leicht zu finden. (3) ergiebt sich entweder leicht indirect oder direct, wenn man den mittelsten Punkt mit den beiden äußern verbindet und §. 72, 70, u. 9 oder §. 72 u. 26 anwendet.

§. 74. Erklärung.

Ein Viereck, welches lauter rechte Winkel hat, heißt ein Rechteck oder Rectangel; ein Viereck mit lauter gleichen Seiten wird Raute oder Rhombus genannt, und ein Viereck, welches sowohl gleiche Seiten, als Winkel hat, heißt Quadrat oder regelmäßiges Viereck.*) — Endlich spricht man auch wohl zuweilen vom Rhomboides, und versteht darunter ein Viereck, in welchem nur die gegenüberstehenden Seiten und Winkel gleich sind.

Es versteht sich von selbst, daß die genannten Vierecke sämmtlich Parallelogramme sind.

§. 75. Zusatz.

1) Das Parallelogramm wird bestimmt durch zwei (zusammenstoßende) Seiten und einen Winkel; d. h. alle Parallelogramme, die in zwei Seiten und einem Winkel übereinstimmen, sind congruent;

2) das Rechteck wird bestimmt durch zwei Seiten,

3) die Raute durch eine Seite und einen Winkel,

4) und das Quadrat durch eine Seite.

Bew. Die Richtigkeit dieser Sätze folgt sehr leicht aus §. 67.

*) Im gemeinen Leben wird gewöhnlich unter der Benennung „Viereck" vorzugsweise das regelmäßige verstanden. Ein Tischblatt heißt viereckig, wenn seine Oberfläche ein Quadrat vorstellt.

Anm. Folgende (minder wichtige) Sätze sind äußerst leicht zu erweisen:

1) In jedem Parallelogramm halbiren sich die Diagonalen.

2) Im Rechteck sind sie überdieß gleich lang.

3) In der Raute stehen sie auf einander senkrecht.

4) Im Quadrate findet natürlich beides Statt, weil das Quadrat zugleich Rechteck und Raute ist.

Die vorhergehenden Behauptungen gelten auch umgekehrt, nehmlich:

5) Ein Viereck, dessen Diagonalen sich halbiren, ist ein Parallelogramm.

6) Ein Parallelogramm, dessen Diagonalen gleich lang sind, ist ein Rechteck.

7) Ein Parallelogramm, dessen Diagonalen sich unter rechten Winkeln schneiden, ist eine Raute.

8) Wenn daher in einem Parallelogramm die Diagonalen gleich lang sind und auf einander senkrecht stehen, so ist es ein Quadrat.

§. 76. Erklärung.

Ein Viereck, in welchem zwei gegenüberstehende Seiten parallel laufen, heißt ein Trapez.

Anm. Gewöhnlich nimmt man an, daß die beiden Parallelen ungleich sind, was indeß nicht gerade nothwendig ist. Wenn sie gleich sind, so ist das Viereck nach §. 72 ein Parallelogramm; im weitern Sinne des Worts ist also jedes Parallelogramm auch ein Trapez.

§. 77. Zusatz.

Im Trapez sind die beiden Winkel an der größern Parallelen zusammen kleiner, an der kleinern zusammen größer, als ein Flacher; es schneiden sich daher die beiden andern Seiten, wenn man sie hinreichend über ihre Durchschnittspunkte mit der kleinern Parallelen verlängert.

Bew. Ziehe durch einen Endpunkt der kleinern Parallelen eine Linie parallel mit der nicht parallelen Seite, die durch den andern Endpunkt geht u. s. w.

Bemerkung. Aus dem Vorhergehenden sieht man, daß die Sätze über das Viereck sämmtlich aus den Sätzen vom Dreieck abzuleiten sind. Dasselbe gilt vom Fünfeck, Sechseck u. s. w., weil diese ebenso wie das Viereck sich durch Diagonalen in Dreiecke zerschneiden lassen, weshalb auch diese Vielecke hier nicht besonders behandelt werden. Einige allgemeine Sätze, welche von allen Vielecken gelten, enthält noch der folgende Abschnitt.

Fünfter Abschnitt.
Vom Kreise.

§. 78. Erklärung.

Eine krummlinige Figur, deren Grenze überall von einem innern Punkte gleichweit absteht, heißt ein Kreis. Die Grenze des Kreises wird Kreislinie oder Peripherie genannt; der innere Punkt, von welchem alle Punkte der Peripherie gleichen Abstand haben, heißt Mittelpunkt oder Centrum, und eine Linie, welche den Mittelpunkt mit einem Punkte der Peripherie verbindet, Radius.

§. 79. Zusatz.

1) Alle Radien eines Kreises sind gleich.

2) Kreise, welche gleiche Radien haben, sind congruent, und

3) congruente Kreise haben gleiche Radien.

§. 80. Zusatz.

1) Liegt ein Punkt innerhalb des Kreises, so ist sein Abstand vom Mittelpunkt kleiner, als der Radius; 2) liegt er in der Peripherie, so ist sein Abstand vom Mittelpunkt dem Radius gleich, und 3) wenn der Punkt außerhalb des Kreises liegt, so ist seine Entfernung vom Mittelpunkt größer, als der Radius. —

Diese drei Behauptungen gelten aber auch umgekehrt, da jede die beiden andern ausschließt, und ein vierter Fall nicht möglich ist.

*§. 81. Lehrsatz.

1) Eine Linie, welche zwei Punkte in der Peripherie verbindet, liegt ganz innerhalb, und ihre Verlängerungen liegen ganz außerhalb des Kreises. Man sagt deshalb von der Linie: sie schneide den Kreis.

Eine grade Linie kann daher mit der Kreislinie nie mehr als zwei Punkte gemeinschaftlich haben.

Bew. 1) Wenn man in der Linie AB (Fig. 20) einen beliebigen Punkt D annimmt und denselben, so wie A und B mit

dem Mittelpunkte verbindet, so ist $\angle CAB = CBA$ (§. 40), aber $\angle CDA > CBA$ (§. 45), folglich auch $\angle CDA > CAB$ und daher im $\triangle CAD$ Seite $CD < AC$; demnach liegt der Punkt D innerhalb des Kreises (§. 80). — Ist dagegen E ein beliebiger Punkt in der Verlängerung von AB, so ist $\angle CBA > CEB$ (§. 45), also auch $\angle CAB > CEB$, daher im $\triangle CAE$ Seite $CE > AC$ und folglich E außerhalb des Kreises (§. 80). —

(2) ist eine nothwendige Folge von (1).

§. 82. Erklärung.

Eine Linie, welche zwei Punkte der Peripherie verbindet, heißt Sehne; eine Sehne, welche durch den Mittelpunkt geht, heißt Durchmesser.

§. 83. Zusatz.

1) Der Durchmesser ist das Doppelte des Radius, welcher deshalb auch Halbmesser genannt wird.

2) Alle Durchmesser eines Kreises sind gleich.

3) Der Durchmesser ist größer, als jede andere Sehne.

4) Der Durchmesser theilt den Kreis in zwei congruente Stücke, welche man Halbkreise nennt.

Bew. (1), (2) und (4) sind an sich klar; (3) ergiebt sich aus §. 38, wenn man die Endpunkte der Sehne mit dem Mittelpunkt verbindet.

§. 84. Lehrsatz.

1) Die Linie, welche die Mitte der Sehne mit dem Mittelpunkte verbindet, steht auf der Sehne senkrecht, und umgekehrt

2) das Loth aus dem Mittelpunkt halbirt die Sehne.

3) Ein Loth auf der Sehne in ihrer Mitte errichtet geht durch den Mittelpunkt.

Bew. (1) folgt leicht aus §. 56 u. 17, (2) entweder indirect aus (1) oder aus §. 62, (3) indirect aus (1).

Bem. Die Behauptungen des vorherg. §. gelten natürlich nicht bloß von dem gleichschenkligen Dreieck, welches eine Sehne zur Grundlinie und Radien zu Seiten hat, sondern überhaupt

von jedem gleichschenkligen Dreieck. Auch kann man noch folgende Behauptung hinzufügen:

4) Die Linie, welche den Winkel an der Spitze im gleichschenkligen Dreieck halbirt, halbirt auch die Grundlinie und steht auf derselben senkrecht.

§. 85. Lehrsatz.

1) Gleiche Sehnen haben gleichen Abstand vom Mittelpunkt.

2) Von zwei ungleichen Sehnen liegt die größere dem Mittelpunkte näher.

Die Beweise sind in §. 62 enthalten. — Auch ist noch klar, daß die vorstehenden Behauptungen auch umgekehrt gelten, was entweder ebenso bewiesen, oder aus denselben indirect abgeleitet wird.

§. 86. Lehrsatz.

1) Wenn man auf dem Radius in seinem Endpunkte ein Loth errichtet, so hat dasselbe mit der Peripherie nur diesen Punkt gemeinschaftlich und liegt übrigens ganz außerhalb des Kreises.

2) Geht aber eine Linie durch den Endpunkt des Radius unter schiefen Winkeln, so schneidet sie den Kreis.

Die Beweise folgen leicht aus §. 50 u. 80.

§. 87. Erklärung.

Eine Linie, welche mit der Peripherie nur einen Punkt gemeinschaftlich hat, übrigens ganz außerhalb des Kreises liegt, heißt eine Tangente oder Berührungslinie.

§. 88. Zusatz.

1) Ein Loth im Endpunkte des Radius errichtet, ist eine Tangente.

2) Der Radius, welcher den Mittelpunkt mit dem Berührungspunkte verbindet, steht auf der Tangente senkrecht.

3) Ein Loth auf der Tangente im Berührungspunkte errichtet geht durch den Mittelpunkt.

Der Beweis von (1) ist in §. 86 enthalten, (2) folgt indirect aus demselben §., und (3) indirect aus (2).

§. 89. Zusatz.

1) Gehen von einem Punkte außerhalb des Kreises zwei Tangenten aus, so sind beide gleich lang, und die Linie, welche jenen Punkt mit dem Mittelpunkt verbindet, halbirt den Winkel, welchen die Tangenten einschließen, und umgekehrt

2) die Linie, welche den Winkel halbirt, den zwei Tangenten einschließen, muß durch den Mittelpunkt gehen.

Der Beweis von (1) folgt aus §. 88, 2. u. 62, 1.; aus (1) folgt (2) indirect.

§. 90. Zusatz.

Ein Ergebniß der vorhergehenden Sätze ist auch der folgende, der mit §. 80 sehr ähnlich lautet: Eine Linie und ein Kreis können (in einer Ebene) eine dreifache Lage gegen einander haben; entweder sie schneiden sich, oder sie berühren sich, oder sie treffen gar nicht zusammen, je nachdem der Abstand der Linie vom Mittelpunkte kleiner, ebenso groß oder größer ist, als der Radius.

§. 91. Erklärung.

Ein Theil der Peripherie heißt ein Bogen. — Zwei Bogen (eines Kreises oder congruenter Kreise) sind gleich, wenn sie sich so zusammenlegen lassen, daß ihre Mittelpunkte und ihre Endpunkte zusammenfallen. Ein Bogen heißt größer, als ein anderer, wenn sie sich so aufeinander legen lassen, daß die Mittelpunkte und ein Paar Endpunkte zusammenfallen, der zweite Endpunkt des ersten aber über den zweiten Endpunkt des andern hinausfällt. — Kleiner. —

§. 92. Erklärung.

Ein Winkel, dessen Scheitel im Mittelpunkte liegt, heißt ein Centriwinkel, und ein Winkel, dessen Scheitel in der Peripherie liegt, und dessen Schenkel den Kreis schneiden, Peripheriewinkel.

§. 93. Lehrsatz.

1) Gleiche Centriwinkel desselben Kreises oder congruenter Kreise haben gleiche Bogen.

2) Gleiche Bogen haben gleiche Centriwinkel.

3) Der größere Centriwinkel hat auch einen größern Bogen.

4) Zum größern Bogen gehört auch ein größerer Centriwinkel.

Bew. Lege die Bogen so zusammen, daß die Mittelpunkte und ein Paar Endpunkte sich decken, und siehe dann zu, wo die andern Endpunkte hinfallen.

§. 94. Erklärung.

Man pflegt die ganze Peripherie in 360 gleiche Theile zu theilen und einen solchen Theil einen Grad zu nennen; der 60ste Theil des Grades heißt Minute, und der 60ste Theil der Minute Secunde, ebenso wie in §. 12. — Es ist leicht zu sehen, daß hiernach ein Bogen allemal so viel Grade, Minuten und Secunden enthält, als sein zugehöriger Centriwinkel.

Anm. Die letzte Behauptung folgt am einfachsten aus dem später zu erweisenden Satze, daß sich Bogen wie die zugehörigen Centriwinkel verhalten; aus didactischen Gründen ist jedoch von der strengen Folge des Systems etwas abgewichen, und in der That läßt sich auch jene Behauptung schon hier ganz leicht rechtfertigen; denn da die halbe Peripherie zum Centriwinkel einen Flachen hat, und auf beide 180^0 kommen sollen, so muß zum Bogen von 1^0 offenbar auch ein Centriwinkel von 1^0 und daher auch zum Bogen von n^0 ein Centriwinkel von n^0 gehören. Dasselbe gilt offenbar ebenso, wenn Minuten und Secunden in Betracht gezogen werden.

§. 95. Lehrsatz.

1) Gleiche Centriwinkel oder Bogen haben auch gleiche Sehnen.

2) Gleiche Sehnen haben auch gleiche Centriwinkel und Bogen.

3) Der größere Centriwinkel oder Bogen hat auch eine größere Sehne.

4) Die größere Sehne hat einen größern Centriwinkel und Bogen.

Die Beweise sind in §. 52, 53, 55 u. 57 enthalten.

Bemerk. Diese Sätze gelten jedoch nur so lange, als nur Bogen in Betracht gezogen werden, welche kleiner sind, als die halbe Peripherie; denn es gehören eigentlich zu jeder Sehne zwei Bogen, welche zusammen die ganze Peripherie ausmachen, und

von denen der eine (der kleinere) gleichzeitig mit der Sehne wächst, der andere dagegen abnimmt, wenn die Sehne zunimmt.

* §. 96. Lehrſatz.

Wenn man einen Punkt innerhalb oder außerhalb eines Kreiſes mit verſchiedenen Punkten der Peripherie verbindet, ſo iſt unter allen Verbindungslinien diejenige am größten, in welcher der Mittelpunkt liegt, diejenige im erſten Fall am kleinſten, welche mit der größten zuſammen einen Durchmeſſer ausmacht, im andern Fall diejenige am kleinſten, welche ſich von der größten um einen Durchmeſſer unterſcheidet, und die Verbindungslinien werden um ſo größer, je größer der zwiſchen ihnen und der kleinſten Linie liegende Bogen iſt.

Bew. Es iſt nehmlich (Fig. 21, a u. b) $AB < AE < AF < AD$, wie leicht aus §. 38 u. 55 folgt.

* Bemerk. Es folgt hieraus auch noch leicht, 1) daß ein Punkt, welcher von drei Punkten der Peripherie gleichen Abſtand hat, der Mittelpunkt ſein muß; und 2) daß zwei Sehnen, welche nicht Durchmeſſer ſind, ſich nicht gegenſeitig halbiren können. (Dieß Letztere folgt außerdem auch aus §. 84, 1.)

§. 97. Lehrſatz.

Der Peripheriewinkel iſt die Hälfte des Centriwinkels, der mit ihm auf gleichem Bogen ſteht.

Bew. Hier ſind drei Fälle möglich; es kann nehmlich 1) ein Schenkel des Peripheriewinkels durch den Mittelpunkt gehen, oder 2) der Mittelpunkt liegt zwiſchen den Schenkeln oder 3) außerhalb der Schenkel des Peripheriswinkels.

Der Beweis von (1) folgt aus §. 45 u. 46; (2) und (3) ergeben ſich aus (1), wenn man durch den Scheitel des Peripheriewinkels einen Durchmeſſer zieht.

Anm. Dieſe drei Fälle können für den nehmlichen Centriwinkel jedoch nur dann entſtehen, wenn derſelbe ein hohler iſt; für den flachen und für ebenen Centriwinkel iſt allemal nur der zweite Fall möglich.

§. 98. Zusatz.

1) Alle Peripheriewinkel auf demselben oder auf gleichen Bogen sind gleich, und zu gleichen Peripheriewinkeln gehören gleiche Bogen.

2) Der größere Bogen hat auch einen größern Peripheriewinkel und umgekehrt.

3) Der Peripheriewinkel im Halbkreise ist ein rechter.

4) Ist ein Bogen kleiner, als die halbe Peripherie, so ist sein zugehöriger Peripheriewinkel ein spitzer, und ist

5) ein Bogen größer, als die halbe Peripherie, so ist der Peripheriewinkel ein stumpfer.

6) Bilden vier Sehnen eines Kreises ein Viereck, so machen je zwei gegenüberstehende Winkel einen Flachen aus.

7) Zwischen parallelen Sehnen liegen gleiche Bogen, und umgekehrt

8) zwei Sehnen sind parallel, wenn sie gleiche Bogen abschneiden.

Bew. (1) bis (6) ergeben sich unmittelbar aus dem vorherg. §., (7) und (8) aus (1) und §. 28 u. 30.

§. 99. Zusatz.

1) Ist in einem Dreieck die Linie, welche die Spitze mit der Mitte der Grundlinie verbindet, gleich der halben Grundlinie, so ist der Winkel an der Spitze ein rechter; ist jene Linie größer oder kleiner, als die halbe Grundlinie, so ist der Winkel an der Spitze ein spitzer oder stumpfer.

2) Dieselben Behauptungen gelten auch umgekehrt.

Bew. Die in (1) enthaltenen Behauptungen sind zwar unmittelbare Folgerungen aus dem vorherg. §.; es wird aber auch eine nützliche Uebung gewähren, dieselben aus §. 40, 46 u. 48 herzuleiten. — (2) folgt indirect aus (1).

§. 100. Erklärung.

Ein Theil des Kreises, welcher von zwei Radien und dem zwischenliegenden Bogen begrenzt wird, heißt ein Kreisausschnitt,

und ein Theil des Kreises, welcher von einem Bogen und der zugehörigen Sehne begrenzt ist, heißt ein Kreisabschnitt.

§. 101. Zusatz.

1) Zu gleichen Bogen gehören in einem oder in congruenten Kreisen congruente Abschnitte und Ausschnitte.

2) Peripheriewinkel, die in demselben Abschnitte liegen, sind gleich, weil sie auf demselben Bogen stehen.

§. 102. Lehrsatz.

Der Winkel, welchen eine Sehne mit der Tangente im Berührungspunkte bildet, ist dem Winkel im entgegengesetzten Abschnitte gleich.

Bew. Ist die Sehne ein Durchmesser, also der Abschnitt ein Halbkreis, so sind die erwähnten Winkel beide rechte nach §. 88, 2 u. 98, 3. — Geht die Sehne nicht durch den Mittelpunkt, so ergiebt sich der Beweis für den Abschnitt, in welchem der Mittelpunkt liegt, wenn man einen Peripheriewinkel zeichnet, dessen einer Schenkel durch den Mittelpunkt geht, aus den eben angeführten §§. und § 41, 2 und für den andern Abschnitt aus dem eben Bewiesenen und §. 98, 6.

§. 103. Lehrsatz.

Durch drei Punkte, welche nicht in gerader Linie liegen, läßt sich allemal eine und auch nur eine einzige Kreislinie legen.

Der Beweis folgt aus §. 84, 3 und 33, 4.

Bemerk. Es können daher zwei Kreislinien, wenn sie nicht zusammenfallen sollen, höchstens zwei Punkte gemeinschaftlich haben.

§. 104. Erklärung.

Eine Figur heißt in den Kreis beschrieben, wenn ihre Seiten Sehnen sind; um den Kreis beschrieben, wenn ihre Seiten Tangenten sind.

§. 105. Lehrsatz.

Um jedes Dreieck läßt sich ein Kreis beschreiben.

Der Beweis ist in §. 103 enthalten.

§. 106. Lehrſatz.

In jedes Dreieck läßt ſich ein Kreis beſchreiben.

Bew. Der Mittelpunkt wird gefunden, wenn man zwei Winkel halbirt.

Anm. Da der Mittelpunkt nach §. 89, 2 in jeder der beiden Halbirungslinien, alſo in ihrem Durchſchnitt liegen muß, ſo kann in das Dreieck nur ein Kreis beſchrieben werden. Dagegen giebt es noch drei Kreiſe, von denen jeder eine Seite und die Verlängerungen der beiden andern Seiten berührt.

* §. 107. Lehrſatz.

1) In einem Viereck im Kreiſe ſind die Summen der gegenüberſtehenden Winkel gleich, und umgekehrt

2) wenn in einem Viereck die Summen der gegenüberſtehenden Winkel gleich ſind, ſo läßt ſich um daſſelbe ein Kreis beſchreiben.

3) Iſt ein Viereck um einen Kreis beſchrieben, ſo geben die gegenüberſtehenden Seiten eine gleiche Summe, und umgekehrt

4) wenn in einem Viereck je zwei gegenüberſtehende Seiten einerlei Summe geben, ſo läßt ſich in daſſelbe ein Kreis beſchreiben.

Bew. (1) iſt bereits in §. 98, 6 erwieſen, (3) ergiebt ſich aus §. 89, 1, und (2) u. (4) folgen indirect aus (1) u. (3).

Anm. Aus dem vorſtehenden Lehrſatze ergiebt ſich noch insbeſondere:

1) Um jedes Rechteck läßt ſich ein Kreis beſchreiben.

2) In jede Raute läßt ſich ein Kreis zeichnen.

3) In und um ein Quadrat kann ein Kreis beſchrieben werden

4) Dieſe Behauptungen gelten auch umgekehrt, nehmlich ſo: ein Parallelogramm iſt ein Rechteck oder eine Raute, wenn u. ſ. w.

§. 108. Lehrſatz.

1) Wenn man die Peripherie eines Kreiſes in eine beliebige Anzahl (mehr, als zwei) gleiche Theile theilt und die auf einander folgenden Theilungspunkte durch Sehnen verbindet, ſo bilden die Sehnen ein regelmäßiges Vieleck im Kreiſe.

2) Wenn man aber durch die Theilungspunkte Tangenten legt, ſo erhält man ein regelmäßiges Vieleck um den Kreis.

Bew. 1) Die Seiten und Winkel des ersten Vielecks sind gleich nach §. 95, 1 und 98, 1.

2) Im zweiten Polygon müssen 1.1) alle Winkel gleich sein nach §. 66; 2.2) läßt sich leicht zeigen, daß die Seiten in den Berührungspunkten halbirt sind; 3.3) die Hälften sind gleich nach §. 89, 1; daher sind 4.4) auch die ganzen Seiten gleich.

§. 109. Zusatz.

Die Seite des regelmäßigen Sechsecks im Kreise ist dem Radius gleich.

Bew. Dieselbe bildet nehmlich mit zwei Radien ein Dreieck, in welchem jeder Winkel = 60° ist.

§. 110. Lehrsatz.

In und um jedes regelmäßige Vieleck läßt sich aus dem nehmlichen Punkte ein Kreis beschreiben. Dieser Punkt heißt der Mittelpunkt des Vielecks.

Bew. Der Mittelpunkt wird für den fernern Beweis am bequemsten durch Halbirung zweier Winkel, die an einer Seite liegen, erhalten. Der Durchschnittspunkt hat zunächst von allen Winkelspitzen gleichen Abstand; denn die Verbindungslinien halbiren auch alle andern Polygonwinkel, und die entstandenen Dreiecke sind sämmtlich congruent und gleichschenklig. Hieraus folgt dann leicht, daß jener Punkt auch von allen Seiten gleich weit absteht, und es läßt sich folglich aus demselben sowohl um, als in das Vieleck ein Kreis beschreiben.

§. 111. Erklärung.

Zwei Kreislinien sind entweder concentrisch oder excentrisch, d. h. sie haben entweder denselben oder verschiedene Mittelpunkte. Die Linie, welche die Mittelpunkte zweier excentrischen Kreise verbindet, heißt Centrallinie.

Bemerk. Zwei concentrische Kreislinien (in derselben Ebene) können offenbar keinen Punkt gemeinschaftlich haben, oder sie fallen ganz zusammen. — Werden excentrische Kreislinien ihrer Lage

nach mit einander verglichen, so stellen sich zunächst folgende zwei Fälle heraus, deren Möglichkeit an sich klar ist: entweder die Kreislinien treffen gar nicht zusammen, oder sie haben einen Punkt (vielleicht außer diesem noch einen zweiten, aber vermöge §. 103 niemals einen dritten Punkt) gemeinschaftlich. Dieser letzte Hauptfall läßt aber wieder noch drei besondere Fälle zu, die im folgenden §. näher erörtert sind. Nimmt man nehmlich in einer Ebene irgend drei Punkte an, zwei als Mittelpunkte und die Verbindungslinien mit dem dritten als Radien zweier zu beschreibenden Kreise, so daß also der dritte Pnnkt nothwendig beiden Kreislinien angehört, so kann entweder der dritte Punkt in der Centrallinie oder in ihrer Verlängerung oder außerhalb derselben liegen.

§. 112. Lehrsatz.

Wenn zwei (excentrische) Kreislinien in einem Punkte zusammentreffen, so kann dieser gemeinschaftliche Punkt entweder

1) in der Centrallinie liegen und die Kreislinien haben dann nur diesen einen Punkt gemeinschaftlich; jede liegt ganz außerhalb der andern, und man sagt dann: die Kreise*) berühren sich von Außen;

2) oder der gemeinschaftliche Punkt kann in der Verlängerung der Centrallinie liegen, und die Kreislinien haben ebenfalls keinen zweiten Punkt gemeinschaftlich, sondern die mit dem kleinern Radius beschriebene liegt ganz innerhalb der andern, und man sagt: die Kreise berühren sich von Innen;

3) oder endlich der Punkt des Zusammentreffens liegt außerhalb der Centrallinie (zur Seite); die Kreislinien haben dann jedenfalls noch einen zweiten Punkt gemeinschaftlich, und man sagt dann: die Kreise schneiden sich.

Bew. (1) und (2) folgen sehr leicht (direct) aus §. 38 und 80. — In (3) wird der zweite gemeinschaftliche Punkt gefunden, wenn man das Dreieck, welches die Mittelpunkte und

*) Der Kürze wegen sagt man häufig Kreis, wo es eigentlich Kreislinie heißen sollte.

der gegebene gemeinschaftliche Punkt bilden, so an die andere Seite der Centrallinie legt, daß diese ihre Lage ungeändert beibehält.

§. 113. Zusatz.

Da von den drei Fällen des vorherg. §. immer nur einer möglich ist, so gelten die drei Behauptungen desselben auch umgekehrt, nehmlich

1) wenn zwei Kreise sich von Außen berühren, so liegt der Berührungspunkt in der Centrallinie.

2) Berühren sich zwei Kreise von Innen, so liegt der Berührungspunkt in der Verlängerung der Centrallinie.

3) Schneiden sich zwei Kreise, so liegen die Durchschnittspunkte zu beiden Seiten der Centrallinie.

Anm. Daß zwei excentrische Kreislinien nicht zwei Punkte an derselben Seite der Centrallinie gemeinschaftlich haben können, ist leicht einzusehen und folgt unter Andern aus §. 56 oder daraus, daß die Kreislinien dann noch eben zwei solche Punkte (vergl. §. 112 Bew. 2) an der andern Seite, also überhaupt vier Punkte gemeinschaftlich haben müßten, was gegen §. 103 streitet.

§. 114. Lehrsatz.

1) Wenn zwei Kreise sich schneiden, so ist die Centrallinie kleiner, als die Summe, aber größer, als die Differenz der Radien.

2) Berühren sich zwei Kreise von Außen, so ist die Centrallinie gleich der Summe der Radien.

3) Berühren sich zwei Kreise von Innen, so ist die Centrallinie gleich der Differenz der Radien.

4) Liegt ein Kreis ganz außerhalb des andern, ohne denselben zu treffen, so ist die Centrallinie größer, als die Summe der Radien.

5) Liegt eine Kreislinie ganz innerhalb der andern, so daß sie in keinem Punkte zusammentreffen, so ist die Centrallinie kleiner, als die Differenz der Radien.

Bew. Die Richtigkeit von (1), (2) und (3) fällt nach dem vorherg. §. in die Augen. (4) und (5) ergeben sich nicht weniger leicht.

§. 115. Zuſatz.

Außer den im vorherg. §. angeführten fünf Fällen kann es offenbar keinen ſechsten geben, und es müſſen daher die vorſtehenden Behauptungen ſämmtlich auch umgekehrt gelten; ſo insbeſondere müſſen ſich zwei Kreiſe ſchneiden, wenn die Centrallinie kleiner, als die Summe, aber größer, als die Differenz der Radien iſt.

Bew. Wiewohl der vorſtehende Satz, wie ſchon geſagt, keines beſondern Beweiſes mehr bedarf, ſo ſoll doch um größerer Deutlichkeit willen der herausgehobene Fall, der die wichtigſten Anwendungen findet, noch im Einzelnen durchgenommen werden. — Iſt die Centrallinie kleiner, als die Summe, aber größer, als die Differenz der Radien, ſo können ſich die Kreiſe weder von Außen, noch von Innen berühren, weil ſonſt gegen die Vorausſetzung die Centrallinie entweder der Summe oder der Differenz der Radien gleich ſein müßte; — es iſt auch nicht möglich, daß die Kreiſe gar nicht zuſammentreffen; denn dann müßte die Centrallinie entweder größer, als die Summe, oder kleiner, als die Differenz der Radien ſein, was ebenfalls der Vorausſetzung widerſpricht. — Demnach bleibt nichts Anderes übrig, als daß die Kreiſe ſich in zwei Punkten ſchneiden. — Ebenſo können die übrigen Fälle im Einzelnen erörtert werden.

§. 116. Zuſatz.

Wenn zwei Kreiſe ſich ſchneiden, alſo zwei Punkte und zwiſchen denſelben eine Sehne gemeinſchaftlich haben, ſo werden

1) die zur gemeinſchaftlichen Sehne gehörigen Centriwinkel und Bogen,

2) auch dieſe Sehne ſelbſt durch die Centrallinie halbirt, und

3) die Centrallinie ſteht auf der gemeinſchaftlichen Sehne ſenkrecht.

Die Beweiſe ſind äußerſt leicht zu finden (und bleiben dieſelben, es mag nun das durch die Mittelpunkte und einen Durchſchnittspunkt beſtimmte Dreieck an der Centrallinie zwei ſpitze oder einen rechten oder einen ſtumpfen Winkel haben).

Bemerk. Der vorstehende Satz läßt sich auch dahin aussprechen: Wenn zwei gleichschenklige Dreiecke eine gemeinschaftliche Grundlinie haben, und man verbindet ihre Spitzen, so halbirt die Verbindungslinie 1) die Winkel an der Spitze, 2) die gemeinschaftliche Grundlinie, und 3) steht sie auf dieser senkrecht. — (Der Satz gilt ebensowohl, wenn die Spitzen auf entgegengesetzten Seiten, als wenn sie auf derselben Seite der Grundlinie liegen.) —

*§. 117. Lehrsatz.

Wenn zwei Kreislinien zwei Punkte gemeinschaftlich haben, so theilen sie sich in denselben gegenseitig in zwei Bogen, von denen der eine innerhalb, der andere außerhalb des andern Kreises liegt. — (Außerhalb liegt der Bogen, welcher die verlängerte Centrallinie auf der Seite seines Mittelpunkts schneidet; der andere Bogen liegt innerhalb.)

Beweis. In den Dreiecken ADB, ACB und AEB (Fig. 22., a u. b) ist Seite AB gemeinschaftlich, AD = AC = AE, ∠DAB < CAB < EAB, folglich nach §. 55 BD < CB < EB, und deshalb nach §. 80 D innerhalb und E außerhalb des Kreises um B.

Anm. Aus diesem Satze ergiebt sich das Passende des Ausdrucks „Schneiden" für Kreislinien, welche zwei Punkte gemeinschaftlich haben.

Sechster Abschnitt.
Vermischte Aufgaben.

§. 118. Bemerkung.

Durch die letzten Sätze wird man in den Stand gesetzt, verschiedene Aufgaben geometrisch aufzulösen. Eine Aufgabe geometrisch auflösen heißt die vorgelegte Aufgabe auf andere bekannte geometrische Aufgaben zurückführen. Weil aber dieses Zurückführen nothwendig seine Grenzen hat, so müssen gewisse

Grundaufgaben vorhanden sein, deren Ausführbarkeit an sich klar ist, die also eines Beweises weder bedürfen, noch fähig sind. Diese Aufgaben sind folgende:

1) Zwischen zwei Punkten eine grade Linie zu ziehen.

2) Eine begrenzte grade Linie über den einen Endpunkt beliebig weit zu verlängern.

3) Um einen Punkt mit einem gegebenen Radius einen Kreis zu beschreiben.

Diese Aufgaben, bei welchen die Bewegung eines Punktes auf einer graden Linie oder die Bewegung einer graden Linie in einer Ebene um einen festgehaltenen Endpunkt gefordert wird, heißen auch Postulate, und bilden die Grundlage aller andern. Denn, wie schon bemerkt, ist unter der geometrischen Auflösung einer Aufgabe nichts Anderes zu verstehen, als die (mittelbare oder unmittelbare) Zurückführung derselben auf die drei Postulate.

Anm. Von der geometrischen Auflösung unterscheidet sich die mechanische dadurch, daß sie noch irgend eine andere Bewegung, als die angegebenen fordert. So kann z. B. die Aufgabe: auf eine Linie aus einem außerhalb gegebenen Punkte ein Perpendikel zu fällen, mechanisch so gelöst werden: Lege einen rechten Winkel so an die Linie, daß ein Schenkel in dieselbe, der andere auf die Seite des gegebenen Punktes fällt, bewege (schiebe) dann den Winkel längs der Linie so hin, daß der erste Schenkel fortwährend mit der Linie zusammenfällt und setze die Bewegung so lange fort, bis der andere Schenkel durch den gegebenen Punkt geht. — Diese mechanische Auflösung, welche sich für die Zeichenkunst vortrefflich eignet, und gewiß im Practischen von Jedem, der einen Winkelhaken besitzt, vor der weiter unten anzugebenden geometrischen entschieden den Vorzug erhalten wird, ist hier, wo es sich nur um rein geometrische Auflösungen handelt, durchaus unzulässig, indem sie die Bewegung eines Winkels fordert, welche in die Postulate nicht mit eingeschlossen ist.

§. 119. Aufgabe.

Ein Dreieck zu zeichnen, welches drei gegebene Linien (a, b, c) zu Seiten hat, vorausgesetzt, daß je zwei zusammen größer sind, als die dritte.

Auflösung. Aus den Endpunkten der einen (a) beschreibe mit den andern Kreise u. s. w. — Die Kreise müssen sich schnei-

den, da der Abſtand ihrer Mittelpunkte (a) zunächſt kleiner iſt, als die Summe der Radien (b+c), aber größer, als ihr Unterſchied (b—c) iſt; denn da a+c>b vorausgeſetzt iſt, ſo iſt auch a>b—c.

§. 120. Aufgabe.

1) Ein gleichſeitiges Dreieck zu zeichnen, das eine gegebene Linie zur Seite hat.

2) Ein gleichſchenkliges Dreieck zu zeichnen, das eine gegebene Seite und Grundlinie hat, vorausgeſetzt daß die Seite größer iſt, als die halbe Grundlinie.

§. 121. Aufgabe.

1) Eine begrenzte grade Linie zu halbiren.

2) Einen Winkel zu halbiren.

3) Auf einer Linie in einem in ihr gegebenen Punkte ein Loth aufzurichten.

4) Auf eine Linie aus einem außerhalb gegebenen Punkte ein Loth zu fällen.

Die Auflöſungen und Beweiſe ergeben ſich leicht aus §. 116.

Anm. Die Figuren werden zierlicher und die practiſche Ausführung bequemer, wenn man bei jeder Auflöſung möglichſt denſelben Radius beibehält.

§. 122. Aufgabe.

Einen gegebenen Winkel an eine gegebene Linie in einem gegebenen Punkte in vorgeſchriebener Lage anzutragen.

Die Auflöſung folgt aus §. 119.

§. 123. Aufgabe.

Durch einen Punkt außerhalb einer Linie mit derſelben eine Parallele zu ziehen.

Die Auflöſung ergiebt ſich aus dem vorherg. §. und §. 29 oder 30.

§. 124. Aufgabe.

Eine begrenzte Linie in eine vorgeſchriebene Anzahl (n) gleicher Theile zu theilen.

Aufl. Ziehe durch den einen Endpunkt der Linie unter einem beliebigen Winkel eine unbegrenzte Linie, trage auf diese vom Scheitel aus eine willkührliche Länge mmal auf; verbinde den Endpunkt mit dem Endpunkt der gegebenen Linie, und ziehe durch die übrigen Punkte mit dieser Linie Parallelen u. s. w.

Anm. So leicht es nun also ist, eine Linie in jede Anzahl gleicher Theile zu theilen, so ist es doch bis jetzt nicht gelungen, dasselbe für den Winkel zu leisten, und selbst für die einfach scheinende Aufgabe, einen Winkel in drei gleiche Theile zu theilen, fehlt die rein geometrische Auflösung. Nur für den rechten Winkel ist die Aufgabe leicht nach §. 47, 2. zu lösen. — Außerdem ist klar, wie man einen Winkel in 4, 8, 16 u. dgl. gleiche Theile theilt.

§. 125. Aufgabe.

Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem gegeben sind:

1) die drei Seiten,
2) zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel,
3) a. eine Seite und die beiden anliegenden Winkel oder
   b. eine Seite ein anliegender und der gegenüberliegende Winkel.

Aufl. (1) ist schon früher in §. 119 gelöst, und die Auflösungen von (2) u. (3) sind sehr leicht zu finden.

* §. 126. Aufgabe.

Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem zwei Seiten und ein Winkel an der dritten Seite (Grundlinie) gegeben sind.

Die Auflösung ist zwar sehr leicht zu finden, hat aber verschiedene Fälle zu berücksichtigen und soll deshalb hier vollständig durchgeführt werden.

Der gegebene Winkel sei α, die ihm gegenüberliegende Seite a, die anliegende b. Nun kann 1.1) $a > b$ sein. Dann zeichne einen Winkel $A = \alpha$ (Fig. 23. a), schneide von einem Schenkel aus dem Scheitel $AC = b$ ab, beschreibe aus C mit a einen Kreis, so wird dieser den andern Schenkel und seine Verlängerung auf entgegengesetzten Seiten von A in den Punkten B und D schneiden; denn da $b < a$ vorausgesetzt ist, so liegt A innerhalb des aus C mit dem Radius a beschriebenen Kreises; verbinde endlich C mit dem Durchschnittspunkt B, der auf der Seite des gege-

benen Winkels liegt, so ist ABC das verlangte Dreieck. Die Auflösung bleibt dieselbe, es mag nun α als ein spitzer, rechter oder stumpfer Winkel gegeben sein.

2.2) Ist $a = b$, so muß nach §. 47, 1. α spitz sein; übrigens kann man ebenso verfahren, wie vorher. (Der zweite Durchschnittspunkt D fällt in diesem Falle mit A zusammen.)

3.3) Ist $a < b$, so muß jedenfalls $\angle A$ spitz sein; es sind aber noch außerdem wieder drei Fälle zu unterscheiden. Hat man nehmlich, wie vorher (Fig. 23. b) $\angle A = \alpha$, $AC = b$ gemacht und aus C das Loth CE herabgelassen, so ist:

entweder $a > CE$ (aber $< CA$); dann schneidet ein aus C mit a beschriebener Kreis nach §. 90 den andern Schenkel in zwei Punkten B und D, welche, da $a > CE$ ist, auf entgegengesetzten Seiten von E, aber weil $a < b$ ist, auf derselben Seite von A liegen müssen (§. 63, 3). Verbindet man nun C mit D und B, so erhält man zwei verschiedene Dreiecke ACB und ACD, welche beide die verlangten Stücke enthalten; —

oder es ist $a = CE$; dann wird der aus C mit a beschriebene Kreis den andern Schenkel in E berühren, und das rechtwinklige Dreieck ACE ist das verlangte;

oder endlich a ist $< CE$; dann trifft der Kreis aus C mit a beschrieben den andern Schenkel gar nicht, und die Aufgabe ist nicht zu lösen.

Es hat hiernach die obige Aufgabe eine Auflösung, wenn $a > b$ ist, — α kann spitz, recht oder stumpf sein, — oder wenn $a = b$ und α spitz oder $a (< b) = CE$ ist. — Sie hat zwei verschiedene Auflösungen, wenn α spitz und $a < b$, aber $> CE$ ist. — Sie hat gar keine Auflösung, wenn $a < b$ und α ein rechter oder stumpfer Winkel ist, oder wenn α spitz, aber $a < CE$ ist.

§. 127. Aufgabe.

In einen Kreis eine gegebene Linie, die kleiner ist, als der Durchmesser, als Sehne von einem gegebenen Punkte der Peripherie aus einzutragen.

Die Aufgabe hat zwei Auflösungen.

§. 128. Aufgabe.

An einen Kreis eine Tangente zu ziehen

1) durch einen in der Peripherie gegebenen Punkt,

2) durch einen außerhalb gegebenen Punkt.

Die Auflösung von (1) fällt in die Augen; (2) ergiebt sich aus §. 88, 1. u. 98, 3.

§. 129. Aufgabe.

Von einem Kreise einen Abschnitt abzuschneiden, der einen gegebenen Winkel faßt.

Es lassen sich leicht mehrere Auflösungen finden.

§. 130. Aufgabe.

Ueber einer gegebenen begrenzten Linie, als Sehne einen Abschnitt zu zeichnen, der einen gegebenen Winkel faßt.

Die Auflösung folgt aus §. 102.

Siebenter Abschnitt.
Von der Aehnlichkeit der Figuren.

§. 131. Bemerkung. *)

Die für das Verständniß dieses und des nächsten Abschnitts unentbehrlichen Sätze der Arithmetik und der allgemeinen Größenlehre sind folgende:

*) Bei einer streng wissenschaftlichen Anordnung des Unterrichts werden die Sätze der allgemeinen Größenlehre und die betreffenden Lehren der wissenschaftlichen Arithmetik, jedem besondern Zweige der Größenlehre, also auch der Geometrie vorangehen müssen. Viele Gründe, deren Entwicklung der Raum verbietet, und die außerdem als allgemein bekannt angenommen werden können, machen es jedoch wünschenswerth, den Unterricht in der Geometrie schon mit Anfängern zu beginnen, denen noch eine wissenschaftliche Kenntniß der Arithmetik und der allgemeinen Größenlehre fehlt. Um dieses möglich zu machen,

1) Erklärung. Eine Größe durch eine andere gleichartige messen, heißt untersuchen, wie oft die eine in der andern enthalten ist. Die Größe, mit welcher man mißt, heißt Einheit oder Gemäß, und die ganze oder gebrochene Zahl, welche durch das Messen gefunden wird, die also anzeigt, wie oft eine Größe in der andern enthalten ist, wird Maaß genannt.

So giebt z. B. der Thaler durch den Silbergroschen gemessen das Maaß 30, der Thaler durch den Gulden gemessen das Maaß $3/2$, der Fuß durch den Zoll gemessen das Maaß 12 u. dgl.

---

sind auch in dieser Schrift die vorhergehenden Abschnitte (1—6) so vorgetragen, daß nur die allereinfachsten Sätze der allgemeinen Größenlehre, die auch dem schwächsten Anfänger hinreichend bekannt sein dürften, in Anwendung kommen. Die nächsten Abschnitte erfordern jedoch zu ihrem Verständniß noch die Kenntniß anderer Sätze, die vielleicht von manchem Anfänger noch gar nicht gekannt oder nur unvollkommen aufgefaßt sein dürften. Diese Sätze sind in der obigen Bemerkung zusammengestellt und sollen mit eben der Sorgfalt, wie die eigentlich geometrischen Sätze in der Schule bewiesen — (an dieser Stelle um größerer Anschaulichkeit willen wohl zweckmäßiger in bestimmten Zahlen, als in allgemeinen Zeichen) — und die Beweise von den Schülern zu Hause ausgearbeitet werden. Dabei ist aber als unerlaßliche Vorkenntniß Vertrautheit mit den vier Species ganzer und gebrochener Zahlen vorausgesetzt. Freilich wird der Schüler im Rechenunterricht mehr diese Kenntniß sich auf praktischem Wege durch vielfache Uebung, als strenge Begründung und Einsicht in den wissenschaftlichen Zusammenhang derselben erworben haben. So wie es aber allein zweckmäßig ist, den Unterricht im practischen Rechnen dem in der wissenschaftlichen Arithmetik voranzuschicken, so erscheint es aus ähnlichen Gründen nicht unzuläßig, den geometrischen Unterricht auch mit Schülern zu beginnen, denen noch wissenschaftliche Kenntniß der allgemeinen Größenlehre fehlt. — Dagegen ist jedenfalls dafür Sorge zu tragen, daß dem reifern Jünglinge (bei einer Wiederholung des Ganzen) auch der wissenschaftliche Zusammenhang des Systems klar werde, und dahin ist es dieser Schrift wenigstens durchgehends gestrebt und deshalb auch die in derselben befolgte Anordnung getroffen, nach welcher die allg. Größenlehre der Geometrie vorangeschickt ist. So werden auch Leser, denen es vorzüglich um Auffassung des Systems zu thun ist, die ganze erste Abtheilung früher, als die vorliegende durchzunehmen und dann die obige Bemerkung gänzlich zu überschlagen haben.

2) Erklärung. Unter dem Verhältniß zweier Größen versteht man den Bruch, der entsteht, wenn man beide durch dieselbe Einheit mißt und die erhaltenen Maaße durch einander dividirt. — Das Verhältniß zweier Größen A und B wird bezeichnet durch

$$A : B \text{ oder } \frac{A}{B}.$$

Ist dieses Verhältniß dem Bruche $\frac{m}{n}$ gleich, so erhält man die Gleichung

$$A : B = m : n$$

oder

$$\frac{A}{B} = \frac{m}{n},$$

welche man so ausspricht; A verhält sich zu B wie m zu n. Diese Gleichung sagt also nichts Anders aus, als daß es eine dritte Größe giebt, welche in A mmal, in B nmal enthalten ist.

So verhält sich der Thaler zum Gulden wie 3:2, weil es eine dritte Größe giebt, das Zehnsilbergroschenstück, welches im Thaler 3mal, im Gulden 2mal enthalten ist. Der Frankfurter Thaler verhält sich zum Berliner Thaler (ohngefähr) wie 23:30, weil im Frankf. Th. der Silbergroschen 23mal, im Berl. Th. 30mal enthalten ist. — Umgekehrt: Wenn sich die Linie A (Fig. 24) zu B, wie 5:3 verhält, so muß es eine dritte Linie C geben, welche in A 5mal und in B 3mal enthalten ist.

3) Erklärung. Eine Gleichung zwischen zwei Brüchen heißt eine Zahlenproportion, und eine Gleichung zwischen zwei Verhältnissen eine Größenproportion. — Glieder, Vorderglieder, Hinterglieder, innere und äußere Glieder. —

Eine Proportion, in welcher die Mittelglieder gleich sind, heißt eine stetige, und das gleiche Mittelglied heißt die mittlere Proportionale zwischen den beiden äußern Gliedern. — Eine stetige Zahlenproportion ist z. B. folgende:

$$4 : 6 = 6 : 9.$$

4) Zusatz. Jede Größenproportion läßt sich in eine Zahlenproportion verwandeln, wenn man statt der Größen, welche ein Verhältniß bilden, ihre Maaße setzt; und umgekehrt: jede Zahlenproportion läßt sich in eine Größenproportion verwandeln,

wenn man statt der Zahlen solche Größen setzt, welche diese Zahlen zu Maaßen haben, wobei natürlich vorausgesetzt wird, daß diejenigen Größen, welche ein Verhältniß bilden, durch dieselbe Einheit gemessen sind.

Ist z. B. von den beiden folgenden Proportionen:

$$6\,\text{℔} : 8\,\text{℔} = 9\,\text{Th.} : 12\,\text{Th.}$$

und

$$6 : 8 = 9 : 12$$

die eine richtig, so muß auch nothwendig die andere richtig sein.

Die Sätze, welche lehren, wie aus einer gegebenen Zahlenproportion andere richtige Zahlenproportionen abgeleitet werden, gelten daher auch nothwendig von Größenproportionen, jedoch, wie sich von selbst versteht, bei diesen mit der Beschränkung, daß Größen, welche ein Verhältniß bilden, nicht ungleichartig sein dürfen.

5) Lehrsatz. In jeder Zahlenproportion ist das Product der äußern Glieder gleich dem Product der innern Glieder.

6) Lehrsatz. Sind zwei Producte als gleich gegeben, so bilden die Factoren des einen die innern, die Factoren des andern die äußern Glieder einer richtigen Proportion.

7) Lehrsatz. In jeder Zahlenproportion lassen sich die Vorder- und Hinterglieder vertauschen.

8) Lehrsatz. In jeder Zahlenproportion lassen sich die innern Glieder vertauschen.

9) Lehrsatz. I) Ist in einer Zahlenproportion das erste Glied ebenso groß oder größer oder kleiner als das zweite, so ist auch das dritte Glied ebenso groß, größer oder kleiner, als das vierte; und wenn II) das erste Glied ebenso groß, größer oder kleiner ist, als das dritte, so ist auch das zweite ebenso groß, größer oder kleiner, als das vierte.

10) Lehrsatz. In jeder Zahlenproportion verhält sich die Summe oder Differenz des ersten und zweiten Gliedes zum zweiten, wie die Summe oder Differenz des dritten und vierten Gliedes zum vierten.

11) Lehrsatz. In jeder Zahlenproportion verhält sich auch die Summe oder Differenz der Vorderglieder zur Summe oder

Differenz der Hinterglieder, wie ein Vorderglied zu seinem Hintergliede.

12) Zusatz. Sind mehrere Verhältnisse (Brüche) als gleich gegeben, so verhält sich auch die Summe aller Vorderglieder zur Summe aller Hinterglieder wie ein Vorderglied zu seinem Hintergliede.

13) Zusatz. Die vorhergehenden Sätze von Zahlenproportionen gelten nach (4) auch von Größenproportionen; doch sind natürlich (5) und (6) ausgenommen, weil es ungereimt sein würde, Größen mit einander zu multipliciren. *) Ferner gelten (8), (11) und (12) nur dann, wenn die Größen sämmtlicher Verhältnisse gleichartig sind.

14) Erklärung. Im Vorhergehenden ist überall, wo von dem Verhältniß zweier Größen die Rede ist, vorausgesetzt, daß wirklich eine dritte Größe vorhanden ist, durch welche sich beide ohne Rest messen lassen. Dergleichen Größen, welche ein gemeinsames Gemäß haben, heißen commensurabel; es giebt aber auch incommensurabele Größen, für welche sich kein gemeinsames Gemäß auffinden läßt, indem jede Größe, welche in der einen aufgeht, in der andern einen Rest läßt. Das Verhältniß incommensurabler Größen kann daher auch nie vollständig in Zahlen ausgedrückt werden, und es lassen sich nur Zahlen angeben, welche größer oder kleiner sind, als das gesuchte Verhältniß. Dergleichen Zahlen findet man, wenn man die eine gegebene Größe A z. B. in 100 gleiche Theile theilt und dann zusieht, wie oft einer dieser Theile in der andern B enthalten ist; ange-

*) Wenn in der Rechenkunst z. B. bei folgendem Exempel

$$3\ \text{A} : 8\ \text{A} = 7\ \text{Th.} : x\ \text{Th.}$$

angegeben wird: „Multiplicire die beiden Mittelsätze (8 A und 7 Th.) und dividire durch den Vordersatz 3 A, so erhältst du den Hintersatz ($18^2/_3$ Th.)", so ist dieß weiter nichts, als Kürze des Ausdrucks, wofür es eigentlich heißen sollte: „Multiplicire die Zahlen der Mittelsätze (8 und 7), und dividire durch die Zahl des Vordersatzes (3), so erhältst du die Zahl des Hintersatzes ($x = \frac{7 \cdot 8}{3} = 18^2/_3$)".

nommen er sei darin mehr, als 317-, aber weniger, als 318mal enthalten, so wird man sagen, das Verhältniß von $\frac{B}{A}$ liege zwischen den Zahlen $\frac{317}{100}$ und $\frac{318}{100}$, welche sich um $\frac{1}{100}$ von einander unterscheiden. Es ist leicht zu sehen, daß dieser Unterschied um so kleiner ausfällt, je größer die Zahl der Theile ist, in welche man A getheilt hat, und daß man die Grenzen, zwischen denen das zu suchende Verhältniß enthalten ist, einander so nahe bringen kann, als man nur irgend will. — Nun ist es aber immer noch möglich, sich eine Zahl zu denken, welche zwischen jedem Paar zusammengehöriger Grenzen liegt, wie wenig diese sich auch von einander unterscheiden mögen, und die daher von dem gesuchten Verhältniß nicht mehr verschieden sein kann. Eine solche nur denkbare Zahl, die nicht selbst dargestellt werden kann, sondern für die sich nur (beliebig enge) Grenzen angeben lassen, zwischen denen sie liegen muß, nennt man eine irrationale Zahl und ebenso das Verhältniß, dem sie gleich gedacht wird, ein irrationales. So wie aber von irrationalen Zahlen dieselben Sätze gelten, wie von rationalen, so gelten auch von den irrationalen Verhältnissen die (im Vorhergehenden angeführten) Sätze der allgemeinen Größenlehre.

§. 132. Lehrsatz.

Wenn eine Linie die beiden Seiten eines Dreiecks durchschneidet und mit der Grundlinie parallel ist, so verhalten sich

1) die obern Abschnitte wie die untern,

2) die obern Abschnitte wie die ganzen Seiten,

3) die untern Abschnitte wie die ganzen Seiten.

Bew. Bestimme das Verhältniß der beiden Abschnitte einer Seite und verfahre dann nach §. 124.

Anm. Hierbei ist angenommen, daß das Verhältniß der beiden Abschnitte einer Seite sich wirklich durch zwei Zahlen darstellen lasse. Diese beiden Abschnitte können aber auch incommensurabel und ihr Verhältniß folglich irrational sein. Nun wird zwar der oben angedeutete Beweis nach §. 131, 14. auch für diesen Fall gelten müssen; um indeß die Sache in ein noch klareres Licht zu stellen, soll hier

noch gezeigt werden, daß die beiden gleich zu setzenden Verhältnisse jedenfalls zwischen denselben Grenzen liegen. Es sei also (Fig. 25) $DE \parallel BC$ und AD und DB seien incommensurabel; man theile AD in eine beliebige Anzahl z. B. m gleiche Theile, und trage einen Theil, den mit α bezeichnet sein mag, auf DB auf, so bleibt hier jedenfalls zuletzt ein Rest BF, der kleiner ist, als α, und wenn man also α nochmals aufträgt, so fällt sein Endpunkt G über B hinaus. Es sei nun $DF = n\alpha$, $DG = (n+1)\alpha$, so wird man

$$\frac{DB}{AD} > \frac{n}{m}, \text{ aber } < \frac{n+1}{m}$$

zu setzen haben. Zieht man jetzt durch die Theilungspunkte mit der Grundlinie Parallelen, so werden auch auf CA gleiche Stücke abgeschnitten, und wenn man einen solchen Theil β nennt, so ist, wie die Figur zeigt, $AE = m\beta$, $EC > n\beta$, aber $< (n+1)\beta$, folglich:

$$\frac{EC}{AE} > \frac{n}{m}, \text{ aber } < \frac{n+1}{m}.$$

Demnach liegen die Verhältnisse $DB : AD$ und $EC : AE$ zwischen denselben Grenzen, d. h. Grenzen, zwischen denen das eine Verhältniß enthalten ist, schließen allemal auch das andere ein.

Ebenso läßt sich dasselbe für die Verhältnisse $AD : AB$ und $AE : AC$ und für die Verhältnisse $DB : AB$ und $EC : AC$ darthun.

§. 133. Zusatz.

Es verhält sich auch die Grundlinie des abgeschnittenen Dreiecks zur Grundlinie des ganzen Dreiecks wie ein oberer Abschnitt zur (zugehörigen) ganzen Seite.

Bew. Ziehe durch einen Endpunkt der kleinern Grundlinie mit der gegenüberstehenden Seite eine Parallele und betrachte diese Seite als Grundlinie.

§. 134. Lehrsatz.

Wenn eine Linie die Seiten eines Dreiecks so durchschneidet, daß sich die obern Abschnitte verhalten, wie die ganzen Seiten, so ist sie der Grundlinie parallel.

Der Beweis folgt indirect aus §. 132.

Anm. Dieß ist die umgekehrte Behauptung von §. 132, 2.; ebenso gelten auch (1) und (3) umgekehrt, da jede dieser drei Proportionen die andern beiden nach §. 131, 11. in sich schließt. Dagegen gilt §. 133 nicht unbedingt auch umgekehrt.

§. 135. Erklärung.

Zwei gradlinige Figuren heißen ähnlich (∞), wenn die Winkel der einen den Winkeln der andern der Reihe nach gleich sind und die gleichliegenden Seiten daſſelbe Verhältniß zu einander haben. — (Gleichliegende Seiten sind solche, welche zwischen gleichen Winkeln liegen, und zwar so, daß zunächst die beiden anliegenden und dann auch alle folgenden der Reihe nach in beiden Vielecken übereinstimmen.)

Anm. So ist (Fig. 26) das Viereck abcd∞ABCD, wenn $a = A$, $b = B$, $c = C$, $d = D$ und z. B. $ab = \frac{2}{3}AB$, $bc = \frac{2}{3}BC$, $cd = \frac{2}{3}CD$, $da = \frac{2}{3}AD$ oder allgemeiner: $ab : AB = bc : BC = cd : CD = da : DA$ ist.

§. 136. Zusatz.

1) Regelmäßige Vielecke von gleicher Seitenzahl sind ähnlich.

2) Die Perimeter ähnlicher Vielecke verhalten sich wie ein Paar ähnlich liegende Seiten.

Bew. (1) ist an sich klar, und (2) folgt leicht aus §. 131, 12. (oder wenn jede Seite in dem einen Vieleck z. B. $\frac{1}{3}$ von jeder Seite im andern ist, so ist natürlich auch der ganze Umfang im ersten $\frac{1}{3}$ vom ganzen Umfang im zweiten).

§. 137. Lehrsatz.

Wenn man in einem Dreieck eine Linie mit der Grundlinie parallel zieht, so ist das abgeschnittene Dreieck dem ganzen ähnlich.

Der Beweis folgt sehr leicht aus §. 27, 122 u. 132.

§. 138. Lehrsatz.

Zwei Dreiecke sind ähnlich:

1) wenn sie in den drei Winkeln übereinstimmen;

2) wenn sie in einem Winkel und dem Verhältniß der einschließenden Seiten übereinstimmen.

Bew. 1) u. 2) Trage zwei Seiten des einen auf die gleichliegenden Seiten des andern auf dem Scheitel des eingeschlossenen

(gleich gegebenen) Winkels auf und verbinde die Endpunkte, so ist die Verbindungslinie der dritten Seite parallel (nach §. 29 in (1) und nach §. 134 in (2)) und daher das abgeschnittene Dreieck dem einen gegebenen Dreiecke ähnlich (§. 137) und dem andern congruent (§. 52).

* §. 139. Zusatz.

Ebenso lassen sich auch noch folgende Sätze erweisen, (die jedoch im Folgenden keine Anwendung finden):

3) Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in den Verhältnissen der drei Seiten übereinstimmen.

4) Wenn zwei Dreiecke in dem Verhältnisse zweier Seiten und einem Winkel an der dritten Seite übereinstimmen, so sind entweder auch die beiden andern Winkel an der dritten Seite gleich und die Dreiecke folglich ähnlich, oder diese Winkel sind ungleich und ergänzen sich zu einem Flachen.

Anm. Man sieht leicht, wie diese Sätze genau den vier Congruenzfällen §. 52, 53, 56 u. 58 entsprechen.

§. 140. Lehrsatz.

1) Aehnliche Vielecke werden durch ähnlich liegende Diagonalen in ähnliche Dreiecke zerschnitten.

2) Sind die im Vorhergehenden bezeichneten Dreiecke ähnlich, so sind auch die Vielecke ähnlich.

Die Beweise folgen leicht aus §. 138.

§. 141. Zusatz.

1) Sind zwei ähnliche Vielecke in Kreise beschrieben, so ist das Verhältniß der gleichliegenden Seiten, also auch das Verhältniß der Perimeter dem Verhältniß der Radien oder Durchmesser gleich.

2) Die Peripherien zweier Kreise verhalten sich wie die Radien oder Durchmesser.

Bew. 1) Ziehe aus einer gleichliegenden Ecke in jedem Vielecke einen Durchmesser und verbinde seinen Endpunkt mit dem Endpunkt einer anliegenden Seite, so sind die entstandenen

Dreiecke ähnlich nach §. 98, 1. u. 3. und §. 138, 1., indem die zu gleichliegenden Seiten als Sehnen gehörigen Peripheriewinkel nach §. 140, 1. gleich sein müssen.

2) Denn der Kreis kann als ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten angesehen werden. — (Es wird nehmlich allein durch diese Vorstellung möglich, die Peripherie mit der graden Linie, also mit Radius oder Durchmesser zu vergleichen).

§. 142. Lehrsatz.

Wenn man im rechtwinkligen Dreieck aus der Spitze des rechten Winkels ein Loth auf die Hypotenuse fällt, so sind

1) die beiden entstandenen Dreiecke unter sich und dem ganzen ähnlich. Daraus folgt:

2) Jede Cathete ist die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Hypotenuse und dem anliegenden Abschnitt.

3) Das Loth ist mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten der Hypotenuse.

Der Beweis ist leicht, aber wegen der großen Wichtigkeit des Satzes sehr sorgfältig auszuführen.

Anm. In dem rechtw. △ ACB (Fig 27) sei AB = 25, AC = 15, BC = 20, AD = 9, BD = 16, CD = 12. Dann verhält sich:

1) AD : AC = AC : AB, d. h. 9 : 15 = 15 : 25,
2) BD : BC = BC : AB, d. h. 16 : 20 = 20 : 25,
3) AD : CD = CD : BD, d. h. 9 : 12 = 12 : 16.

§. 143. Lehrsatz.

1) Wenn zwei Sehnen eines Kreises sich durchschneiden, so bilden die Abschnitte der einen die äußern, die Abschnitte der andern die innern Glieder einer Proportion.

2) Gehen aus einem Punkte außerhalb des Kreises zwei Linien, welche den Kreis schneiden, so verhalten sich die ganzen Secanten umgekehrt, wie ihre äußern Abschnitte.

3) Gehen aus einem Punkte außerhalb eine Tangente und eine Secante an den Kreis, so ist die Tangente mittlere Proportionale zwischen der ganzen Secante und dem äu

Bew. Bilde ähnliche (gleichwinklige) Dreiecke bei (1) und (2) nach §. 98, 1., bei (3) nach §. 102.

§. 144. Aufgabe.

Zu den drei gegebenen Linien a, b, c die vierte Proportionale x zu finden, so daß sich verhält:

$$a:b = c:x.$$

Die Auflösung ergiebt sich leicht aus §. 132.

§. 145. Aufgabe.

Zu zwei gegebenen Linien a und b die mittlere Proportionale zu zeichnen, so daß sich also verhält:

$$a:x = x:b.$$

Die Auflösung ergiebt sich doppelt aus §. 142, 2. u. 3. Außerdem könnte auch §. 143, 3. zur Aufl. benutzt werden.

§. 146. Aufgabe.

1) Ueber einer gegebenen Linie, als Seite ein Dreieck, welches einem gegebenen ähnlich ist, so zu zeichnen, daß die gegebene Linie mit einer bestimmten Seite des gegebenen Dreiecks eine gleiche Lage hat.

2) Ueber einer gegebenen Linie, als Seite ebenso in vorgeschriebener Lage ein Vieleck zu zeichnen, welches einem gegebenen ähnlich ist.

Die Auflösung von (1) ergiebt sich leicht aus §. 138; (2) folgt aus (1) und §. 140, 2.

Achter Abschnitt.

Von den Bedingungen der Gleichheit und von der Inhaltsberechnung der gradlinigen Figuren.

§. 147. Erklärung.

Zwei Figuren heißen gleich, wenn sie aus denselben congruenten Stücken bestehen. — Zwei Figuren sind daher auch

dann gewiß gleich, wenn eine dritte Figur in beiden gleich vielmal enthalten iſt.

Eine Figur heißt gröſſer als eine andere, wenn ein Theil der erſten der andern gleich iſt, alſo auch, wenn eine dritte Figur in der erſten mehrmal enthalten iſt, als in der zweiten.

Anm. 1. Vergl. die Anm. zu §. 8.

Anm. 2. So iſt z. B. in Fig. 28 das Dreieck dem Viereck gleich, wenn die in ihnen gleich bezeichneten Stücke congruent ſind; ferner in Fig. 29 das Quadrat gleich dem Rechteck, weil in beiden daſſelbe kleinere Dreieck gleich vielmal enthalten iſt. *)

§. 148. Lehrſatz.

Zwei Parallelogramme, welche eine Seite gemeinſchaftlich haben und zwiſchen denſelben Parallelen liegen, ſind gleich.

Bew. Die ganze Figur ſtellt ein Trapez vor, von welchem ſich die Parallelogramme um congruente Dreiecke unterſcheiden.

§. 149. Erklärung.

Man pflegt im Parallelogramm eine Seite Grundlinie und ihren ſenkrechten Abſtand von der gegenüberſtehenden Seite Höhe zu nennen.

§. 150. Zuſatz.

Parallelogramme mit gleicher Höhe und Grundlinie ſind gleich.

Bew. Denn ſie laſſen ſich vermöge §. 73, 3. ſo zuſammenlegen, daß ihre gleichen Grundlinien ſich decken und die gegenüberſtehenden Seiten in einer mit der Grundlinie parallelen Linie liegen.

§. 151. Lehrſatz.

1) Das Dreieck iſt die Hälfte eines Parallelogramms, das mit ihm gleiche Höhe und Grundlinie hat.

2) Dreiecke mit gleicher Höhe und Grundlinie ſind gleich.

Bew. (1) folgt aus §. 69 und 150 und (2) aus (1).

*) Dieß erinnert an das chineſiſche Figurenſpiel, bei welchem ſich aus denſelben Stücken Figuren von ſehr verſchiedener Geſtalt zuſammenſetzen laſſen, die alle einerlei Größe haben.

§. 152. Lehrſatz.

Das Trapez iſt einem Dreieck gleich, welches die Summe der beiden Parallelen zur Grundlinie und ihren ſenkrechten Abſtand von einander zur Höhe hat.

Der Beweis iſt leicht zu finden.

§. 153. Lehrſatz.

1) Das regelmäßige Vieleck iſt einem Dreieck gleich, welches den Umfang des Vielecks zur Grundlinie und den Radius des hineinbeſchriebenen Kreiſes zur Höhe hat.

2) Der Kreis iſt einem Dreieck gleich, welches die Peripherie zur Grundlinie und den Radius zur Höhe hat.

Bew. (1) ergiebt ſich leicht aus §. 110 und (2) folgt aus (1).

§. 154. Lehrſatz.

Wenn man in einem Parallelogramm eine Diagonale zieht, in derſelben einen willkührlichen Punkt annimmt und durch dieſen Parallelen mit den Seiten zieht, ſo wird das ganze Parallelogramm in vier Parallelogramme zerſchnitten; die beiden Parallelogramme, durch welche die Diagonale nicht geht, ſind gleich und heißen Complemente.

Der Beweis folgt ſehr leicht aus §. 69.

§. 155. Lehrſatz.

Rechtecke von gleicher Höhe verhalten ſich wie ihre Grundlinien.

Der Beweis iſt dem von §. 132 ſehr ähnlich.

§. 156. Zuſatz.

Rechtecke von gleicher Grundlinie verhalten ſich wie die Höhen.

Bew. Denn im Rechteck kann man jede Seite als Grundlinie und jede Seite als Höhe anſehen.

§. 157. Zuſatz.

Die beiden letzten Sätze gelten auch von Parallelogrammen überhaupt und von Dreiecken.

Bew. Denn jedes Parallelogramm ist eben so groß und das Dreieck halb so groß, wie ein Rechteck, das mit ihm gleiche Höhe und Grundlinie hat. (§. 150 u. 151.)

§. 158. Erklärung.

Wenn man eine Figur durch eine andere, als Einheit gemessen hat und dann die ausgemessene Figur (ihrer Größe nach) als benannte Zahl ausdrückt, so nennt man diese benannte Zahl den Inhalt der Figur. — Als Einheit nimmt man gewöhnlich ein Quadrat an.

Wenn im Folgenden der Inhalt eine Figur aus den Maaßen gewisser Linien berechnet werden soll, so wird allemal vorausgesetzt, daß diese Linien durch die Seite des Quadrats, welches man zur Flächeneinheit angenommen hat, gemessen sind, und daß sich also die Maaße jener Linien auf diese Seite, als Längeneinheit, beziehen.

Anm. 1. Nach der vorstehenden Erklärung ist also der Inhalt einer Figur (z. B. 8 Quadratfuß) — so wie jede benannte Zahl — ein zusammengesetzter Ausdruck, in welchem sowohl angegeben ist, mit welcher Einheit (Quadratfuß) man die zu messende Figur verglichen hat, als auch wie oft (8mal) die Einheit in derselben enthalten ist.

Anm. 2. Als Längeneinheit nimmt man gewöhnlich den preußischen oder rheinländischen Fuß an. Zwölf dieser Fuß bilden eine Ruthe. Den zwölften Theil des Fußes nennt man einen Zoll und den zwölften Theil des Zolles eine Linie. — Diese Eintheilung heißt die Duodecimaleintheilung und wird besonders im bürgerlichen Verkehr gebraucht (Werkmaß). Eine andere Eintheitheilung, deren sich hauptsächlich die Feldmesser bedienen, ist die Decimaleintheilung, welche mit der vorhergehenden nur in der Größe der Ruthe übereinstimmt, in den übrigen Bestimmungen aber abweicht, indem hier die Ruthe in 10 Fuß, der Fuß in 10 Zoll, der Zoll in 10 Linien eingetheilt wird. — Bei beiden Eintheilungen bezeichnet man der Kürze wegen

	eine Ruthe,	einen Fuß,	einen Zoll,	eine Linie
durch	1^0,	$1'$,	$1''$,	$1'''$.

Die Flächen mißt man durch die Quadrate dieser Linien und bezeichnet kürzer eine Quadratruthe, einen Quadratfuß, einen Quadratzoll und eine Quadratlinie beziehlich durch

$$1\square^0,\quad 1\square',\quad 1\square'',\quad 1\square'''.$$

Es ist aber in der Duodecimaleintheilung $1\square^0 = 144\square'$, $1\square' = 144\square''$, $1\square'' = 144\square'''$ und in der Decimaleintheilung $1\square^0 = 100\square'$, $1\square' = 100\square''$, $1\square'' = 100\square'''$.

Die Decimaleintheilung hat vor der andern den Vorzug, daß das Geschäft des sogenannten Reducirens sich ohne alle Mühe ausführen läßt; so sind z. B. nach derselben

$7^0\,8'\,3''\,5''' = 7835''' = 783{,}5'' = 78{,}35' = 7{,}835^0$,

$5\,\square'\,37\,\square''\,9\,\square''' = 53709\,\square''' = 537{,}09\,\square'' = 5{,}3709\,\square'$.

Will man Angaben nach der einen Eintheilung in die andere umsetzen, so hat man sich nur zu erinnern, daß für beide die Größe der Ruthe dieselbe ist. Drückt man die Längenruthe und die Quadratruthe nach beiden Eintheilungen aus, so erhält man:

	in Decimalmaaß		in Duodecimalmaaß
für Längen	$10'$	=	$12'$
	$100''$	=	$144''$
	$1000'''$	=	$1728'''$
für Flächen	$100\,\square'$	=	$144\,\square'$
	$10000\,\square''$	=	$20736\,\square''$
	$1000000\,\square'''$	=	$2985984\,\square'''$.

Von den Gemäßen, die im bürgerlichen Leben am häufigsten Anwendung finden, ist 1 preuß. Elle = $28\frac{1}{2}$ rheinl. Zoll, 1 preuß. Meile = 2000 Ruthen = 24000 rheinl. Fuß, 1 geographische Meile, deren 15 auf einen Grad des Aequators gehen, = 23664 rheinl. Fuß, ein preuß. Morgen = 180 □Ruthen.

§. 159. Lehrsatz.

Die Zahl für den Inhalt eines Rechtecks wird gefunden, wenn man das Maaß der Höhe mit dem Maaß der Grundlinie multiplicirt.

Sind also g und h die Maaße der Höhe und Grundlinie und ist J die Zahl des Inhalts, so ist

$$J = g.h.$$ *)

*) Der obige Lehrsatz pflegt in den Lehrbüchern eine viel spätere Stelle einzunehmen, und eine solche scheint ihm allerdings zu gebühren, wenn es sich um eine streng systematische Anordnung handelt. Durch das Voranstellen dieses Satzes, der sich auch hier schon ganz gründlich erweisen läßt, gewinnt man aber für die folgenden Sätze theils an Kürze und Uebersichtlichkeit, theils da die meisten sich als unmittelbare Folgerungen aus demselben ergeben, theils an Anschaulichkeit; denn einerseits ist der obenangedeutete Beweis gewiß auch dem schwächsten Anfänger einleuchtend, andrerseits pflegen die Schüler schon lange vorher, ehe sie im geometrischen Unterricht bis zu dieser Stelle gekommen sind, sich mit dem obigen Satze vertraut zu machen, und

Bew. Sind 1) g und h ganze Zahlen, so fällt die Richtigkeit des Satzes in die Augen. Werden 2) ganz allgemein für g und h Brüche angenommen, — (der Bruch schließt die ganze Zahl mit in sich) — ist z. B. $g = \frac{m}{n}$, $h = \frac{p}{q}$, ferner das auszumessende Rechteck R, das zur Einheit angenommene Quadrat Q, seine Seite a und ein Rechteck, das zu Seiten $\frac{1}{n}a$ u. $\frac{1}{q}a$ hat, S, so ist nach (1):

$$Q = nqS \text{ und } R = mpS,$$

folglich $R : Q = mp : nq$

d. h. $$J = \frac{mp}{nq} = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = g \cdot h.$$

Anm. Der Schüler hat für beide Fälle bestimmte Zahlen anzunehmen und an zupassenden Figuren den Beweis durchzuführen.

Bemerkung. Der vorhergehende Lehrsatz wird gewöhnlich kurz so ausgesprochen: „Der Inhalt eines Rechtecks wird gefunden, wenn man die Höhe mit der Grundlinie multiplicirt". — In ähnlicher abgekürzter Art sind auch die nächstfolgenden Sätze ausgedrückt.

Ebenso wird man im Folgenden der Kürze und leichtern Uebersicht wegen häufig Linien und ihre Maaße durch dieselben Buchstaben bezeichnen und eine Linie, welche die Zahl a zum Maaße hat, auch kurzweg die Linie a nennen. Diese doppelte Bedeutung der nehmlichen Zeichen kann jedoch keine Mißverständnisse herbeiführen, wenn man nur festhält, daß in der Rechnung alle Buchstaben allein Zahlen (Maaße von Linien u. dgl.), niemals die Größen selbst vorstellen. In der Figur dagegen hat man unter den Buchstaben die Linien selbst zu verstehen.

---

und so wird das Auffassen der folgenden etwas abstracteren Wahrheiten bedeutend erleichtert, indem sich dieselben an Altbekanntes und hinreichend Geläufiges anlehnen. — Ein Leser dagegen, dem es um strenges Verfolgen des Systems zu thun ist, wird den obigen Satz §. 159 und §. 160 u. 161 ganz an das Ende dieses Abschnitts verweisen und die andern Sätze aus §. 161, der sich auch ganz unabhängig von §. 159 erweisen läßt (vergl. § 161 Anm.), ableiten können.

§. 160. Zusatz.

Aus dem letzten Satze und §. 150—152 folgt:

1) Der Inhalt (J) eines Parallelogramms ist gleich dem Product aus der Grundlinie (g) und der Höhe (h); also

$$J = g.h.$$

2) Der Inhalt (J) eines Quadrats wird gefunden, wenn man die Seite (a) des Quadrats mit sich selbst multiplicirt; also

$$J = a.a = a^2.$$

3) Der Inhalt (J) eines Dreiecks ist gleich dem halben Product aus der Grundlinie (g) und der Höhe (h); also:

$$J = \frac{1}{2} g.h.$$

4) Der Inhalt (J) eines Trapezes wird gefunden, wenn man die beiden Parallelen (a und b) addirt, die Summe mit der Höhe (h) multiplicirt und vom Product die Hälfte nimmt; demnach ist

$$J = \frac{1}{2}(a+b).h.$$

Anm. Weil die zweite Potenz einer Zahl den Inhalt eines Quadrats ausdrückt, dessen Seite jene Zahl zum Maaße hat, so wird in der Arithmetik die zweite Potenz einer Zahl auch das Quadrat derselben genannt.

§. 161. Zusatz.

Parallelogramme und Dreiecke verhalten sich wie die Producte aus den Höhen und Grundlinien.

Bew. Denn diese Producte sind für die erstern dem einfachen, für die andern dem doppelten Inhalte gleich, und Figuren verhalten sich natürlich wie ihre Inhalte (§. 131, 2.), also auch wie die doppelten Inhalte.

Anm. Dieser wichtige Satz, der hier aus §. 159 abgeleitet ist, kann jedoch auch unmittelbar, in ähnlicher Art, wie §. 159, erwiesen werden. — Sind nehmlich R und R' zwei Rechtecke mit den Grundl. G und G' und den Höhen H und H' und sind g und g' die Maaße von G und G' für dieselbe Einheit, ebenso h und h' die Maaße von H und H' ebenfalls für einerlei Einheit, (die übrigens von der vorhergehenden verschieden sein kann); ist ferner

$$G : G' = g : g' = m : n$$

und

$$H : H' = h : h' = p : q,$$

wo m, n, p und q ganze Zahlen vorstellen sollen; (denn der Quotient zweier Brüche ist allemal einem Bruche gleich): so theile man G′ in n, H′ in q gleiche Theile, die also in G und H mmal und pmal enthalten sind, und bilde aus diesen Theilen ein neues Rechteck S. Dann ist dieses offenbar in R mpmal und in R′ nqmal enthalten; folglich nach §. 131, 3.

$$\frac{R}{R'} = \frac{mp}{nq} = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{g}{g'} \cdot \frac{h}{h'} = \frac{g.h}{g'.h'}. \text{ *)}$$

§. 162. Lehrsatz.

1) Bilden vier Linien eine Proportion, so ist das Rechteck aus den äußeren Gliedern gleich dem Rechteck aus den innern Gliedern.

2) Bilden drei Linien eine stetige Proportion, so ist das Quadrat der mittlern Proportionallinie dem Rechteck der beiden andern Linien gleich.

3) Beide Sätze gelten auch umgekehrt.

Die Beweise von (1) u. (2) folgen sehr leicht aus §. 131, 5. u. 159, und sie gelten 3) auch umgekehrt, weil §. 131, 5. vermöge §. 131, 6. auch umgekehrt gilt.

Anm. Man kann indeß den vorstehenden Satz auch leicht ohne Zuziehung von §. 159 unmittelbar an der Figur nachweisen, wenn man ein Rechteck C bildet, das mit jedem der gegebenen Rechtecke A und B (Fig. 30) eine Seite gemeinschaftlich hat. Dann ist nach §. 155 u. 156

$$A : C = a : b \text{ und } B : C = c : d,$$

folglich wenn A = B ist:

$$a : b = c : d,$$

*) Gewöhnlich wird dieser Satz so erwiesen, daß man ein drittes Rechteck R″ mit der Grundlinie G und der Höhe H′ bildet, dann nach §. 155 und 156 setzt:

$$R : R'' = h : h'$$
$$R'' : R' = g : g'$$

und hieraus durch Multiplication folgert:

$$R.R'' : R''.R' = g.h : g'.h'$$

oder

$$R : R' = g.h : g'.h'.$$

In diesen Gleichungen können indeß doch ohnstreitig R, R′, R″ nicht die Rechtecke selbst, sondern nur ihre auf einerlei Einheit bezogenen Maaße vorstellen. Dann muß aber offenbar, wenn dieser Beweis zulässig sein soll, vorher gezeigt werden, wie sich allgemein zwei Rechtecke durch die nehmliche Einheit messen lassen, oder was im Wesentlichen dasselbe ist, wie man den Inhalt eines Rechtecks findet.

sowie umgekehrt aus dieser Proportion

$$A : C = B : C$$

also $$A = B$$

folgt. — Hierdurch ist auch (2) erwiesen, das nur ein besonderer Fall von (1) ist.

§. 163. Lehrsatz.

Wenn man in einem rechtwinkligen Dreieck aus der Spitze des rechten Winkels ein Loth auf die Hypotenuse fällt, so ist

1) das Quadrat der Cathete gleich dem Rechteck aus der ganzen Hypotenuse und dem anliegenden Abschnitt

2) das Quadrat des Lothes gleich dem Rechteck aus den beiden Abschnitten der Hypotenuse.

I. Bew. 1) Die Cathete AC (Fig. 31) ist mittlere Proportionale zwischen der Hypotenuse AB und dem Abschnitt AD und daher nach dem vorherg. §. das Quadrat ACEF = dem Rechteck ADHG, in welchem die Seite AG = der Hypotenuse AB gemacht ist.

2) Das Loth CD (Fig. 31) ist mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten AD und DB, folglich das Quadrat CEFD = dem Rechteck DBHG, in welchem DG = DA gemacht ist.

II. Bew. 1) Ziehe in Fig. 29 CG und FB, so sind die entstandenen Dreiecke CAG und FAB congruent nach §. 52 und die Hälften der beiden Vierecke.

2) Vollende die Rechtecke CDBL und FDGM, ziehe DL und DM, so ist MDL eine grade Linie, weil $\angle FDM = ACD = CBD = BDL$ ist; folglich ist ED = DH nach §. 134.

Bemerk. Ebenso ist leicht zu sehen, wie sich nun auch die Sätze in §. 143 aussprechen lassen.

§. 164. Der pythagorische Lehrsatz.

Das Quadrat der Hypotenuse ist so groß, als die Summe der Quadrate der Catheten.

Der Beweis folgt sehr leicht aus dem vorherg. §.

§. 165. Lehrsatz

Zwei Dreiecke oder Parallelogramme, welche einen gleichen Winkel haben, verhalten sich wie die Rechtecke der einschließenden Seiten.

Bew. Zeichne ein neues Dreieck oder Prlgrm, welches mit den gegebenen den gleichen Winkel und mit jedem eine Seite gemeinschaftlich hat, so läßt sich dieses mit jedem der gegebenen nach §. 157 vergleichen, und wenn man die entstandenen Proportionen durch Multiplication oder Division verbindet, ergiebt sich der Satz aus §. 159.

Anm. Will man den Beweis ohne Benutzung von §. 159 an der Figur führen, und sind AB und AC (Fig. 33) die gegebenen Prlgrme, AD und AE die aus ihren Seiten gebildeten Rechtecke, so ist nach §. 157:

$$AB : AD = AL : AM = AL : AK$$

und

$$AC : AE = AG : AH = AG : AF.$$

Nun ist aber $AL : AK = AG : AF$, daher auch:

$$AB : AD = AC : AE \text{ oder } AB : AC = AD : AE.$$

Von Dreiecken gilt das Nehmliche, da sie die Hälften von Prlgrmen sind.

§. 166. Lehrsatz.

1) Aehnliche Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten.

2) Ueberhaupt verhalten sich ähnliche Vielecke wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten.

Bew. 1) Nach dem vorherg. §. verhalten sich die ähnlichen Dreiecke wie die Rechtecke zweier einen gleichen Winkel einschließenden Seiten ($a.b : a'.b'$); da aber diese Seiten proportionirt sind, ($a : a' = b : b'$), so läßt sich das Verhältniß der Rechtecke auch durch das Verhältniß der Quadrate zweier gleichliegenden Seiten ($a.b : a'.b' = a^2 : a'^2$) ersetzen, (indem $a.b : a^2 = b : a = b' : a' = a'b' : a'^2$ ist.)

(2) folgt leicht aus (1), da sich nach §. 140 die Vielecke in ähnliche Dreiecke zerschneiden lassen, die nach (1) dasselbe Verhältniß zu einander haben.

Anm. Ist z. B. in Fig. 34 $\triangle$ abc $\sim$ ABC und ac = 2, AC = 3, so ist

$$\triangle abc : ABC = 4 : 9 = 2^2 : 3^2 = ac^2 : AC^2.$$

§. 167. Zusatz.

1) Aehnliche Vielecke, die in Kreise beschrieben sind, verhalten sich wie die Quadrate der Radien oder Durchmesser.

2) Kreise verhalten sich wie die Quadrate der Radien oder Durchmesser.

Der Beweis folgt leicht aus dem vorherg. §. und §. 141.

§. 168. Lehrsatz.

1) Wenn man über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks ähnliche Vielecke in ähnlicher Lage zeichnet, so ist das über der Hypotenuse so groß, als die über den Catheten zusammen.

2) Wenn man mit den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks als Durchmesser oder Radien Kreise beschreibt, so ist der mit der Hypotenuse beschriebene Kreis so groß, als die mit den Catheten beschriebenen zusammen.

Bew. 1) Die ähnlichen Vielecke verhalten sich ebenso zu einander, wie die Quadrate der ähnlich liegenden Seiten; da nun das Quadrat der Hypotenuse so groß ist, als die Quadrate der Catheten zusammen, so muß auch das Vieleck über der Hypotenuse so groß sein, als die über den Catheten zusammen.

(2) folgt auf ganz gleiche Weise aus §. 167, 2.

Anm. Der Schüler hat den Beweis (1) noch besonders an einer Figur und in allgemeinen Zeichen mit Benutzung von §. 131, 11. durchzuführen.

Anm. 2. Hieraus folgt noch leicht der Satz von den Monden des Hippokrates. Hat man nehmlich über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks Halbkreise beschrieben (Fig. 35), so sind die beiden mondförmigen Figuren α und β zusammen so groß, als das Dreieck γ. Denn nach dem vorherg. Satze ist der Halbkreis über der Hypotenuse, $\gamma+\delta+\varepsilon$, so groß, als die Halbkreise über den Catheten, $\alpha+\delta$ und $\beta+\varepsilon$, zusammen genommen, also $\gamma+\delta+\varepsilon = \alpha+\delta+\beta+\varepsilon$ oder $\gamma = \alpha+\beta$.

§. 169. Aufgabe.

Ein gegebenes Vieleck in ein Dreieck zu verwandeln.

Aufl. Ist zunächst ein Viereck gegeben, so theile dasselbe in zwei Dreiecke, und ersetze dann nach §. 151, 2. das eine von

dieſen Dreiecken durch ein neues, welches mit jenem die Diagonale zur gemeinſchaftlichen Grundlinie, ſeine Spitze aber in einer verlängerten Seite des andern Dreiecks hat. — Ein Fünfeck verwandelt man zuerſt in ein Viereck u. ſ. w.

§. 170. Aufgabe.

Ein Dreieck in ein Rechteck zu verwandeln.

Die Auflöſung iſt ſehr leicht zu finden.

§. 171. Aufgabe.

Ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.

Aufl. Suche nach §. 145 die mittlere Proportionale zwiſchen den beiden Seiten des Rechtecks, ſo iſt dieſe nach §. 162, 2. die Seite des geſuchten Quadrats.

§. 172. Aufgabe.

Eine beliebige gradlinige Figur in ein Quadrat zu verwandeln.

Aufl. Verwandle die gegebene Figur zuerſt nach §. 169 in ein Dreieck, das Dreieck nach §. 170 in ein Rechteck und dieſes nach dem vorherg. §. in ein Quadrat.

§. 173. Aufgabe.

1) Ein Quadrat zu zeichnen, welches ſo groß iſt, wie die Summe oder der Unterſchied zweier gegebenen Quadrate.

2) Wenn zwei ähnliche Vielecke gegeben ſind, ein drittes zu zeichnen, das ihrer Summe oder Differenz gleich iſt.

3) Einen Kreis zu zeichnen, welcher ſo groß iſt, als die Summe oder die Differenz zweier gegebenen Kreiſe.

Aufl. (1) ergiebt ſich leicht aus dem pythagoriſchen Satze und ebenſo (2) und (3) aus §. 168.

§. 174. Aufgabe.

1) Ein Quadrat zu zeichnen, welches zu einem gegebenen Quadrat ein vorgeſchriebenes Verhältniß hat.

2) Ein Vieleck zu zeichnen, das einem gegebenen ähnlich iſt und zu demſelben ein vorgeſchriebenes Verhältniß hat.

3) Einen Kreis zu zeichnen, der zu einem gegebenen Kreise ein vorgeschriebenes Verhältniß hat.

Aufl. Hat das gegebene Quadrat die Seite a, und soll das neue Quadrat das mfache des gegebenen sein, wo m eine ganze oder gebrochene Zahl bedeutet, so wird das gesuchte Quadrat offenbar so groß sein, als ein Rechteck mit den Seiten a und ma, wodurch diese Aufgabe auf §. 171 zurückgeführt ist.

Anm. Die Seite eines Quadrats, das doppelt so groß ist, als ein gegebenes, findet man, wenn man die Diagonale zieht, und die Seite des halb so großen Quadrats, wenn man die Diagonale halbirt. — Halbirt man dagegen die Seite des gegebenen Quadrats, so ist das Quadrat dieser Hälfte nur $\frac{1}{4}$ des gegebenen.

§. 175. Aufgabe.

Ein Dreieck in eine vorgeschriebene Anzahl gleicher Theile zu theilen

1) durch Linien aus der Spitze gezogen;

2) durch Linien, die mit einer Seite parallel laufen.

Die Auflösung von (1) springt in die Augen, und die von (2) ist im vorherg. §. enthalten.

§. 176. Aufgabe.

Ein Vieleck zu zeichnen, welches einem gegebenen Vieleck gleich und einem andern gegebenen Vieleck ähnlich ist.

Aufl. Es sei A (Fig. 38) das Vieleck, welches dem gesuchten ähnlich, und B dasjenige, welches ihm gleich sein soll. — Verwandle A und B nach §. 172 in Quadrate; die Seiten dieser Quadrate seien beziehlich c und b; ferner sei a irgend eine Seite des Vielecks A. Suche nach §. 144 die vierte Proportionale x zu c, b und a, so daß sich also verhält

$$c : b = a : x,$$

und zeichne ein Vieleck X ähnlich mit A über x, als ähnlich liegender Seite mit a, so ist X das gesuchte Vieleck.

Bew. Da X nach der Construction ähnlich A ist, so braucht nur noch bewiesen zu werden, daß X = B ist. Nun ist nach der Constr.:

$$c : b = a : x,$$

folglich auch $c^2 : b^2 = a^2 : x^2 = A : X$

nach §. 166, 2. — Nun ist aber nach der Constr. $c^2 = A$ und $b^2 = B$; hiernach verwandelt sich die letzte Proportion in

$$A : B = A : X,$$

woraus $B = X$ hervorgeht.

Anm. Diese sehr allgemeine Aufgabe, bei welcher, wenn auch nicht unmittelbar, doch mittelbar fast alle frühern Sätze zur Anwendung kommen, kann wohl als das Höchste desjenigen angesehen werden, was mit den bis hierher erworbenen Kenntnissen zu leisten sein dürfte. — Mit Hülfe derselben läßt sich z. B. jede beliebige Figur in ein gleichseitiges Dreieck, in ein regelmäßiges Sechseck u. dgl. verwandeln.

Neunter Abschnitt.

Von der Ausmessung des Kreises. *)

§. 177. Erklärung.

Nach §. 141, 2. findet in allen Kreisen das nehmliche Verhältniß zwischen Peripherie und Durchmesser statt; man bezeichnet dieses unveränderliche Verhältniß durch den Buchstaben π und hat also unter π die Zahl zu verstehen, welche anzeigt, wie oft der Durchmesser in der Peripherie enthalten ist. Diese Verhältnißzahl ist indeß irrational und kann folglich nicht ganz genau, sondern nur näherungsweise dargestellt werden. Dergleichen Näherungswerthe sind z. B. der Bruch $\frac{22}{7}$ oder viel genauer der Decimalbruch 3,14159265.. **).

*) Im vorherg. Abschnitte sind zwar bei der Betrachtung ähnlicher Vielecke gelegentlich auch Kreise mehrmals in Hinsicht ihres Inhalts verglichen: doch erübrigt noch zu zeigen, wie man aus dem Radius eines Kreises die Peripherie und den Inhalt berechnet, was den Gegenstand dieses Abschnittes bildet.

**) Es ist ein sehr häufig sich findender Irrthum, daß der Decimalbruch 3,14 dem wahren Verhältniß näher komme, als der gemeine Bruch $\frac{22}{7}$; nun ist aber als Decimalbruch ausgedrückt $\frac{22}{7} = 3{,}142857\ldots$, also von dem wahren Werthe um weni-

Anm. Das Verhältniß $\frac{22}{7}$ ist zuerst von Archimedes entdeckt worden, indem er den Umfang in und um den Kreis beschriebener Vielecke berechnete, und hierdurch Grenzen erhielt, zwischen welchen die gesuchte Zahl liegt. — Gegenwärtig kennt man die Zahl π bis auf etwa 140 Decimalstellen. (Wie man rasch Näherungswerthe derselben findet, lehrt: Ar. §. 435; vergl. auch in vorl. Buche §. 131.)

§. 178. Aufgabe.

Aus dem Radius r die Peripherie p eines Kreises zu berechnen.

Aufl. $p = 2r\pi$.

Bew. Ist der Radius r, so ist der Durchmesser 2r, und da dieser πmal in der Peripherie p enthalten ist, so ist $p = 2r\pi$.

§. 179. Aufgabe.

Aus dem Radius r den Inhalt J eines Kreises zu berechnen.

Aufl. $J = r^2\pi$.

Bew. Der Kreis ist einem Dreieck gleich, welches den Radius r zur Höhe und die Peripherie $2r\pi$ zur Grundlinie hat. Der Inhalt des Dreiecks ist gleich dem halben Product aus der Höhe r und der Grundlinie $2r\pi$, folglich $J = \frac{r \cdot 2r\pi}{2} = r \cdot r\pi = r^2\pi$.

§. 180. Lehrsatz.

Bogen und Ausschnitte eines Kreises oder congruenter Kreise verhalten sich wie die zugehörigen Centriwinkel.

Der Beweis ist derselbe, wie der von §. 132 u. 155.

§. 181. Aufgabe.

Aus dem Radius r und der Anzahl der Grade des Centriwinkels α die Länge des zugehörigen Bogens b und den Inhalt des Ausschnitts A zu berechnen.

Aufl. 1) $b = \frac{r\pi\alpha}{180}$. 2) $A = \frac{r^2\pi\alpha}{360}$.

---

ger, als 0,0013 verschieden, während 3,14 von dem wahren Werthe um mehr als 0,0015 abweicht. — Beiläufig sieht man noch, daß der Bruch $\frac{22}{7}$ ohngefähr um $\frac{1}{800}$ zu groß ist.

Bew. 1) Die Peripherie ist $= 2r\pi$, folglich der Bogen von einem Grade $= \frac{2r\pi}{360} = \frac{r\pi}{180}$ und der Bogen, welcher α^0 hat, $b = \frac{r\pi\alpha}{180}$.

2) Ebenso ist der Kreis $= r^2\pi$, der Ausschnitt von $1^0 = \frac{r^2\pi}{360}$, der Ausschnitt, welcher α^0 hat, $A = \frac{r^2\pi\alpha}{360}$.

Anm. 1. Es versteht sich hiernach von selbst, wie man zu rechnen hat, wenn der Centriwinkel in Minuten oder Secunden ausgedrückt sein sollte.

Anm. 2. Nicht uninteressant ist die Frage nach dem Bogen, dessen Länge dem Radius gleich ist. Bezeichnet man die Zahl seiner Grade mit x, so ist, wenn man in §. 181, 1. $\alpha = x$, $b = r$ setzt;

$$r = \frac{r\pi x}{180} \text{ oder } 180 = \pi x,$$

folglich $$x = \frac{180}{\pi} = \frac{180}{3{,}14159..} = 29{,}57..$$

Der dem Radius gleiche Bogen enthält also ohngefähr $57{,}3^0 = 57^0\,18'$.

§. 182. Zusatz.

Nennt man Bogen und Ausschnitte ähnlich, wenn sie in der Größe der Centriwinkel übereinstimmen, so erhält man noch folgende Sätze:

1) ähnliche Bogen verhalten sich wie ihre Radien;

2) ähnliche Ausschnitte verhalten sich wie die Quadrate der Radien.

Zehnter Abſchnitt. *)

Vermiſchte Sätze und Aufgaben.

A. Theilungen und Verwandlungen gradliniger Figuren.

§ 183. Lehrſatz.

Zwei Dreiecke, welche in zwei Seiten übereinſtimmen, ſind gleich, wenn die eingeſchloſſenen Winkel ſich zu einem Flachen ergänzen.

Bew. Denn die Dreiecke (ABC und ADC Fig. 37.) laſſen ſich mit ein Paar gleichen Seiten (AC) ſo an einander legen, daß die beiden andern gleichen Seiten (AB und AD) eine grade Linie bilden; ſie ſtimmen folglich in den Höhen und Grundlinien überein.

§. 184. Lehrſatz.

Jedes Viereck mit hohlen Winkeln iſt halb ſo groß, als ein Parallelogramm, alſo grade ſo groß, als ein Dreieck, in welchem zwei Seiten den Diagonalen des Vierecks und der eingeſchloſſene Winkel dem (ſpitzen oder ſtumpfen) Winkel gleich iſt, den die Diagonalen mit einander bilden.

Bew. Das gegebene Viereck ſei ABCD (Fig. 38.); ziehe durch D und B EH und FG || AC und durch A und C EF und GH || BD; dann ſind vier kleine Prlgrme. entſtanden, welche durch die Diagonalen AB, BC, CD, DA halbirt werden, und es iſt folglich auch Viereck ABCD die Hälfte des Prlgrms. EFGH, in welchem EF = BD, FG = AC und ∠ EFG = DLC iſt.

*) Die vorhergehenden Abſchnitte enthalten die für das Syſtem unentbehrlichſten Sätze; außer dieſen kennt man aber noch unzählige andere mehr oder weniger merkenswerthe Sätze, von denen einige der wichtigſten und einfachſten in dieſem Abſchnitte zuſammengeſtellt ſind. Die Anordnung ſchien ziemlich willkührlich; doch iſt im Allgemeinen vom Leichtern zum Schwereren fortgeſchritten.

§. 185. Lehrſatz.

1) Wenn man durch die Mitte E der Diagonale eines Parallelogramms ABCD (Fig. 39.) eine beliebige Linie FG zieht, ſo wird durch dieſe das Parallelogramm ebenfalls halbirt; und umgekehrt

2) alle Linien, welche das Parallelogramm halbiren, ſchneiden ſich in demſelben Punkte E.

Bew. 1) Denn es iſt $\triangle$ ABC $\cong$ CDA und $\triangle$ AFE $\cong$ CGE, folglich auch Trapez FBCG = GDAF. (Die beiden Trapeze können auch leicht als congruent erwieſen werden.)

2) Eine Linie HI, welche nicht durch E geht, kann das Prlgrm. nicht halbiren, weil dieß die mit HI durch E gezogene Parallele FG thut.

§. 186. Lehrſatz.

1) Wenn eine Linie den parallelen Seiten eines Trapezes parallel iſt und die eine nicht parallele Seite halbirt, ſo halbirt ſie auch die andere, und umgekehrt

2) eine Linie, welche die Mitten der nicht parallelen Seiten verbindet, iſt mit den parallelen Seiten parallel. Dieſe Linie mag Mittellinie heißen.

3) Alle Linien, welche die beiden parallelen Seiten verbinden, werden durch die Mittellinie halbirt.

4) Die Mittellinie iſt der halben Summe der beiden parallelen Seiten gleich.

5) Das Trapez iſt einem Parallelogramme gleich, das die Mittellinie zur Grundlinie und die Höhe des Trapezes zur Höhe hat.

6) Daher ſind Trapeze mit gleicher Mittellinie und Höhe gleich.

7) Wenn durch einen Punkt der Mittellinie zwei Linien bis zu den parallelen Seiten gezogen ſind, ſo wird durch die eine das Trapez in eben ſo große Stücke getheilt, als durch die andere; und umgekehrt

8) alle Linien, welche die parallelen Seiten treffen und das Trapez auf gleiche Weiſe theilen, ſchneiden ſich in demſelben Punkte der Mittellinie.

Bew. 1. Es sei (Fig. 40.) AD in E halbirt, und EF ‖ AB ‖ CD gezogen, so soll FB = FC sein; ziehe durch F GH ‖ AD, dann ist FG = AE = ED = FH (§. 69), daher △BFG ≅ CFH (§. 53) und BF = FC.

(2) folgt indirect aus (1) oder wird ebenso bewiesen.

3) Die Linie LM wird durch die Mittellinie EF in N halbirt, da EN mit AL parallel und also nach (1) Mittellinie des Trapezes ALMD ist.

4) Nach dem ersten Beweise ist CH = GB; ferner ist EF = AG = DH, folglich 2EF = AG + DH = AB + DC und $EF = \frac{1}{2}(AB + DC)$.

5) Das Trapez ABCD ist offenbar dem Prlgrm. AGHD gleich.

(6) ist ein unmittelbares Ergebniß aus (5).

7) Die Linien LM und OP theilen das Trapez auf gleiche Weise, weil △ LNO ≅ MNP ist.

(8) folgt indirect aus (7) (vergl. §. 185 Bew. 2.)

§. 187. Aufgabe.

1) Ein Parallelogramm, 2) ein Trapez, 3) ein beliebiges Viereck in eine vorgeschriebene Anzahl z. B. 5 gleiche Theile zu theilen.

Aufl. Diese sehr unbestimmt ausgesprochenen Aufgaben lassen sehr vielfache Auflösungen zu. Besonders einfach sind folgende:

1) Theile eine Seite des Prlgrms. in 5 gleiche Theile und ziehe durch die Theilungspunkte mit den anliegenden Seite Parallelen.

2) Ziehe die Mittellinie, theile diese in 5 gleiche Theile und ziehe durch die Theilungspunkte beliebige Linien, welche die parallelen Seiten treffen, so sind die entstandenen fünf kleinern Trapeze nach (6) im vorherg. §. einander gleich (Fig. 41.).

3) Ziehe eine innerhalb fallende Diagonale, theile dieselbe in fünf gleiche Theile und verbinde die Theilungspunkte mit den gegenüberstehenden Winkelspitzen; dann ist a = b = c = d = e (Fig. 42.) und f = g = h = k = l, folglich a + f = b + g = c + h = d + k = e + l.

Es verſteht ſich, daß (1) ebenſo wie (2) und beide, wie (3) gelöſt werden können.

§. 188. Aufgabe.

Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, für welches gegeben iſt:

1) ein Winkel an der Grundlinie,

2) die Grundlinie und ein Winkel an derſelben.

Aufl. 1) Trage an die Grundlinie AB des gegebenen Dreiecks ABC (Fig. 43) im Punkte A den gegebenen Winkel $DAB = \alpha$ an, ziehe durch C eine Parallele zu AB und verbinde den Durchſchnittspunkt D mit B, ſo iſt $\triangle ABD = ABC$ (§. 151, 2.).

2) Verwandle zunächſt das gegebene Dreieck ABC (Fig. 43.) in ein anderes ABD, das den gegebenen Winkel α hat, ſchneide dann von AB aus A (Fig. 44) die gegebene Grundlinie $g = AE$ ab, ziehe DE und damit parallel BF, verbinde F mit E, ſo iſt $\triangle DEF = DEB$, folglich auch $\triangle AEF = ABD$.

Anm. Wie man ein Dreieck in ein anderes verwandelt, von welchem die Grundlinie und der Winkel an der Spitze gegeben ſind, iſt mit Hülfe von §. 101, 2. und 130 leicht zu finden; ferner fällt die Auflöſung ſogleich in die Augen, wenn für das neue Dreieck die Grundlinie und eine Seite gegeben ſind. Die Verwandlung eines Dreiecks in ein anderes mit zwei gegebenen Winkeln wird weiter unten gelehrt.

§. 189. Aufgabe.

Ein Vieleck ABCD (Fig. 45.) in ein Dreieck zu verwandeln, von welchem eine Ecke in einen gegebenen innern Punkt P, eine andere in einen Punkt Q auf einer Seite AB des Vielecks und die dritte in die eine Verlängerung dieſer Seite fällt.

Aufl. Verbinde P mit den Ecken des Vielecks; ziehe durch Q die Linie $Qe \parallel PB$ bis zum Einſchnitt in die verlängerte BC; dann iſt $\triangle PQB = PeB$, folglich $\triangle PQB + PBC = PeC$; — ziehe $cf \parallel PC$ bis zum Einſchnitt in die verlängerte DC; dann iſt $\triangle PCf = PCe = PQB + PBC$, folglich $\triangle PfD = PQB + PBC + PCD$; — ziehe $fg \parallel PD$ bis zum Einſchnitt

in die verlängerte AD, so ist $\triangle PgD = PfD$, folglich $\triangle PgA = PQB + PBC + PCD + PDA$; ziehe endlich $gX \parallel PA$ bis zum Einschnitt in die verlängerte AB, so ist $\triangle PXA = PgA$ und daher $\triangle PXQ =$ Vieleck ABCD.

Anm. Diese Aufgabe ist von der in §. 169 behandelten nicht wesentlich verschieden, hier aber um des Zusammenhangs willen nochmals besonders durchgenommen worden. Auch sieht man leicht, daß wenn der Punkt P nicht im Innern des Vielecks, sondern in einer Seite oder in einer Ecke angenommen wird, die Auflösung sich wohl etwas abkürzt, aber im Wesentlichen dieselbe bleibt. — Ferner kann man noch bemerken, daß die Linien Pe, Pf, Pg nur zum Beweise, nicht zur Auflösung selbst erforderlich sind.

§. 190. Aufgabe.

Von einem Vieleck ABCDE (Fig. 46.) aus einem im Innern gegebenen Punkte durch zwei Linien PQ und PX, von denen die erstere gegeben ist, die andere gesucht wird, ein Stück PQAEDCX von vorgeschriebener Größe auszuschneiden.

Aufl. Verwandle die Figur, welche die Größe des auszuschneidenden Stücks anzeigen soll vermöge §. 169 und 188, 2. in ein Dreieck PQR, das zu einer Seite PQ und zum anliegenden Winkel PQA hat; ziehe dann PA und damit $\parallel Rf$ bis zum Einschnitt in die verlängerte AE, ferner $fg \parallel EP$ bis zum Einschnitt in die verlängerte ED, dann $gh \parallel DP$ bis zum Einschnitt in die Verlängerung von DC, endlich durch h mit PC eine Parallele, welche die anliegende Seite CB selbst (nicht die Verlängerung) schneidet; verbinde P mit X, so ist PX die gesuchte Linie, d. h. es ist $\triangle PQR = PAQ + PEA + PDE + PCD + PXC$, welches eben so, wie im vorherg. §., bewiesen wird.

Anm. Diese Aufgabe, welche als die umgekehrte der vorhergehenden angesehen werden kann, wird nicht wesentlich verändert, sondern nur vereinfacht, wenn man den Punkt P in eine Seite oder in eine Ecke des gegebenen Vielecks legt.

§. 191. Aufgabe.

Ein Vieleck ABCD (Fig. 47. a) durch Linien aus einem im Innern gegebenen Punkte P in eine vorgeschriebene Anzahl, z. B.

5 gleiche Theile ſo zu theilen, daß eine Theilungslinie durch einen beſtimmten Punkt Q des Umfangs geht.

Aufl. Verwandle das gegebene Vieleck nach dem vorletzten Satze in ein Dreieck PQR, deſſen Ecken in P, Q und die verlängerte AB fallen, theile RQ in fünf gleiche Theile, verbinde P mit den Theilungspunkten S, T, U, V, trage diejenigen Punkte, S, T, U, welche zwiſchen R und A liegen, nach dem letzten Satze auf den Umfang des Vielecks über, nehmlich nach W, X, Y und verbinde dieſe Punkte mit P, ſo wird das Vieleck ABCD durch die Linien PQ, PV, PW, PX, PY in 5 gleiche Theile getheilt.

Anm. 1. Auch dieſe Aufgabe erfährt keine weſentliche Abänderung, ſondern nur einige Abkürzung in der Auflöſung, wenn der Punkt P in eine Ecke oder in eine Seite gelegt wird; nur iſt es dann nicht mehr verſtattet, die erſte Theilungslinie PQ willkührlich zu ziehen, ſondern es muß natürlich Q auf der nehmlichen Vielecksſeite mit P liegen. *) — Will man die oben angegebene Zeichnung wirklich ausführen, ſo wird dieſes Geſchäft durch folgende Abänderung etwas bequemer: Ziehe PD (Fig. 47. b), verwandle Vieleck PCBQ in das Dreieck PCO, deſſen eine Seite CO in die Verlängerung von CB fällt, und ebenſo verwandle Vieleck PDAQ in das Dreieck PDM — (d. h. ziehe Qu || PB u. uO || PC und auf der andern Seite ziehe Qv || PA u. vM || PD) — theile OM in fünf gleiche Theile, übertrage die Theilungspunkte, H, K, L, welche in die Verlängerungen von CB fallen, auf den Umfang des Vielecks nach Y, W, V (d. h. ziehe HY || CP, KW || PD, Lz || PD, zV || PA), verbinde P mit X, Y, V, W, ſo wird durch dieſe Verbindungslinien und durch PQ das Viereck ABCD in fünf gleiche Stücke zerſchnitten.

Anm. 2. Will man die vorherg. Aufgabe durch Rechnung löſen, ſo meſſe man die Seiten des Vielecks und die aus P (Fig. 48.) auf dieſelben gefällten Lothe; berechne hieraus den Inhalt der Dreiecke PQA, PAD, PDC, PCB und PQB und den Inhalt des ganzen Vielecks, der F heißen mag. Iſt nun $\frac{1}{5}F < \Delta\ PQA$, ſo ſuche man die Grundlinie eines Dreiecks, das zum Inhalt $\frac{1}{5}F$ und zur Höhe Pα hat, d. h. man berechne $\frac{2F}{5P\alpha} = QV$, ſo iſt PV die erſte

*) Der Anfänger wird ſehr wohl thun, dergleichen einfachere Fälle, z. B. die Theilung eines Dreiecks, wenn P in einer Seite liegt, oder eines Vierecks, wenn P in eine Ecke fällt, u. dgl. an ſorgfältig zu zeichnenden Figuren durchzuführen.

Theilungslinie. Ist ferner $\frac{2}{5}F > \triangle PQA$, aber $< \triangle PQA + PAD$, so suche man wieder die Grundlinie eines Dreiecks, das zum Inhalt $\frac{2}{5}F - \triangle PQA$ und zur Höhe PD hat, ist diese AW, so ist PW die zweite Theilungslinie u. s. w.

Bemerk. Durch die vorhergehende Aufgabe ist offenbar auch die folgende gelöst: ein Vieleck durch Linien aus einem innern Punkte in Stücke zu zerschneiden, die ein vorgeschriebenes Verhältniß zu einander haben.

§. 192. Aufgabe.

Ein Vieleck ABCDEFG (Fig. 49.) wird durch eine gebrochene Linie PONM, welche von einem bestimmten Punkt P im Umfange ausgeht, in zwei Stücke getheilt; man soll durch jenen Punkt eine grade Linie ziehen, welche das Vieleck in zwei eben so große Stücke zerschneidet.

Aufl. Man denke sich AB und ED bis zum Durchschnitt in Z verlängert, verwandle nach §. 189 Vieleck ZPONM in ein Dreieck, von welchem eine Ecke in P, eine zweite in Z und die dritte in die Linie AZ oder ihre Verlängerung über A fällt, d. h. im Einzelnen ziehe PN und PM, Oh $\parallel$ PN bis zum Einschnitt in die verlängerte NM, hX $\parallel$ PM bis zum Einschnitt in AB, verbinde P und X, so ist PX die gesuchte Linie.

Bew. Denn nach der Construction ist $\triangle PON = PhN = PMN + PhM = PMN + PXM$, also $\triangle PON =$ Viereck PXMN. Demnach wird z. B. das an der rechten Seite der gebrochenen Linie liegende Stück (dasjenige, für welches bei O ein hohler Winkel ist,) nicht geändert, wenn man von demselben $\triangle PON$ subtrahirt und Viereck PNMX addirt, wodurch offenbar die gebrochene Grenzlinie MNOP in die grade PX verwandelt wird. Ebenso muß also auch das auf der andern Seite liegende Stück des Vielecks ungeändert bleiben. —

Wenn der Punkt X in die Verlängerung von AB über A oder B hinausfallen sollte, so wird man denselben nach §. 190 auf den Umfang des Vielecks zu übertragen haben.

Anm. In ganz ähnlicher Art könnte man, wenn man Rechnung anwenden wollte, den Inhalt der Dreiecke **PNO** und **PNM** suchen; aus der Differenz, die dem Inhalt des Dreiecks **PMX** gleich sein muß, und aus der Höhe dieses Dreiecks, die dem Lothe aus **P** auf **AB** gleich ist, ergiebt sich dann leicht die fehlende Grundlinie **MX**.

§. 193. Aufgabe.

Ein Dreieck in ein anderes mit zwei gegebenen Winkeln zu verwandeln.

Aufl. Nach §. 188, 1. kann man zuerst das gegebene Dreieck in ein anderes ABC (Fig. 50.) verwandeln, welches den einen gegebenen Winkel $\alpha = BAC$ hat. Legt man nun im Punkte C den andern gegebenen Winkel $\gamma = DCA$ an und denkt sich $XY \parallel CD$ so gezogen, daß $\triangle AXY = ABC$ ist, so kann zur Bestimmung von AX folgende Ueberlegung dienen: Da sich Dreiecke mit einem gleichen Winkel, wie die Rechtecke der einschließenden Seiten verhalten (§. 165), und $\triangle AXY = ABC$ sein soll, so muß

$$AX.AY = AB.AC$$

oder

$$1)\quad AY:AC = AB:AX$$

sein; ferner ist $XY \parallel CD$, daher auch

$$2)\quad AY:AC = AX:AD.$$

Aus (1) und (2) folgt:

$$3)\quad AB:AX = AX:AD.$$

Demnach ist AX mittlere Proportionale zwischen AB und AD und daher die Construction folgende:

Suche nach §. 142, 2. und 145 die mittlere Proportionale AE zwischen AB und AD, mache $AX = AE$ und ziehe $XY \parallel CD$, so ist $\triangle AXY$ das Verlangte.

Anm. Der obige Satz ist, wie leicht zu sehen, ein besonderer Fall von §. 176.

§. 194. Zusatz.

Mit Hülfe des vorhergehenden Satzes lassen sich auch folgende Aufgaben leicht lösen:

1) Von einem Dreieck durch eine Parallele zur Grundlinie oder

2) von einem Trapez durch eine Parallele zu den parallelen Seiten ein Stück von vorgeschriebener Größe abzuschneiden.

3) Ein Dreieck durch Linien der Grundlinie parallel oder

4) ein Trapez durch Linien, die den parallelen Seiten parallel sind, in eine vorgeschriebene Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Aufl. 1) Verwandle nach §. 169 u. 188, 1. die Figur, welche die Größe des abzuschneidenden Stücks anzeigt, in ein Dreieck CDE (Fig. 51.), welches mit dem gegebenen △ ABC den Winkel C gemeinschaftlich hat, ziehe dann, ebenso wie im vorherg. §., DF ‖ AB, suche zwischen CE und CF die mittlere Proportionale CG = CX und ziehe XY ‖ AB, so ist △ CXY = △ CDE.

Denn es verhält sich nach der Construction:

CE : CX = CX : CF

und CX : CF = CY : CD, weil XY ‖ DF ist;

folglich auch CE : CX = CY : CD,

woraus CX . CY = CD . CE

und nach §. 165 △ CXY = CDE hervorgeht. *)

2) Es sei die Größe des abzuschneidenden Stücks durch ein Dreieck CDE (Fig. 52) ausgedrückt, das mit dem Trapez die kleinere der parallelen Seiten CD und einen anliegenden Winkel ECD gemeinschaftlich hat; verlängere die nicht parallelen Seiten, bis sie sich in F schneiden und schneide von dem entstandenen Dreieck AFB durch eine zu AB parallele Linie XY nach (1) ein Stück FXY ab, welches gleich ist dem △ FED; dann ist natürlich auch Trapez DCXY = △ CDE.

3) Die Theilung eines Dreiecks in gleiche Theile durch Linien einer Seite parallel, ist bereits in anderm Zusammenhange in §. 175, 2. behandelt; die folgende etwas abweichende Ueberlegung führt ganz zu der nehmlichen Zeichnung: Theile eine Seite BC (Fig. 53.) in die vorgeschriebene Anzahl, z. B. 5 gleiche Theile, so werden die Verbindungslinien der Theilungspunkte mit A das Dreieck in 5 gleiche Stücke zerschneiden; verwandle nach

*) Um schwächerer Leser willen ist der Beweis des vorherg. §. hier noch besonders durchgeführt.

(1) $\triangle$ CAD in Cdd', $\triangle$ CAE in Cee' u. ſ. w., ſo theilen die zu AB parallelen Linien dd', ee' u. ſ. w. das Dreieck in der verlangten Art.

4) Soll endlich das Trapez ABCD (Fig. 54.) in 3 gleiche Theile durch Linien den parallelen Seiten parallel getheilt werden, ſo verwandle daſſelbe zuerſt in das Dreieck CDE, theile dieſes in drei gleiche Theile und ſchneide $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ u. ſ. f. nach (2) von dem Trapez ABCD ab.

Anm. Man kann die vorhergehenden Aufgaben auch leicht durch Rechnung löſen; hat nehmlich 1) das gegebene Dreieck die Grundlinie g, die Höhe h, das zu ſuchende die Höhe x (Fig. 55.), und iſt F der Inhalt der gegebenen Fläche, ſo iſt nach §. 166

$$\triangle CXY : CAB = CX^2 : CA^2 = x^2 : h^2,$$

oder da $\triangle CXY = F$ ſein ſoll und $\triangle CAB = \frac{1}{2}gh$ iſt:

$$F : \frac{1}{2}gh = x^2 : h^2,$$

folglich $x^2 = \frac{2F.h}{g}$ und 1) $x = \sqrt{\frac{2F.h}{g}}$.

2) Es ſeien a und b die beiden parallelen Seiten (Fig. 56.), h die Höhe des gegebenen, x die Höhe des geſuchten Trapezes und z die Höhe über b, in welcher ſich die nicht parallelen Seiten ſchneiden; dann verhält ſich, wie man leicht ſieht:

$$z : h+z = b : a; \text{ daraus folgt:}$$

$$az = bh + bz,$$

alſo $z = \frac{bh}{a-b}$ und $h+z = \frac{ah}{a-b}$.

Aus dem Werthe von z ergiebt ſich weiter

$$\triangle CDF = \frac{1}{2}bz = \frac{b^2h}{2(a-b)}.$$

Nun läßt ſich die zu löſende Aufgabe auf (1) zurückführen, indem man von dem $\triangle ABF$ ein Stück $= \triangle CDF + F = \frac{b^2h}{2(a-b)} + F$ abſchneidet; ſetzt man dieſen Ausdruck in der Gleichung (1) ſtatt F, $z+x$ ſtatt x, a ſtatt g, $h+z = \frac{ah}{a-b}$ ſtatt h und folglich $\frac{h}{a-b}$ ſtatt $\frac{h}{g}$, ſo erhält man:

$$z+x = \sqrt{\frac{b^2h^2}{(a-b)^2} + \frac{2Fh}{a-b}},$$

und wenn man beiderſeits $z = \frac{bh}{a-b}$ ſubtrahirt:

$$x = -\frac{bh}{a-b} + \sqrt{\frac{b^2h^2}{(a-b)^2} + \frac{2Fh}{a-b}}$$

oder 2) $$x = \frac{-bh + \sqrt{[b^2h^2 + 2Fh(a-b)]}}{a-b}.$$

3) u. 4) Sollten von einem Dreieck oder Trapez auf die angezeigte Art $\frac{m}{n}$ seines Inhalts abgeschnitten werden, so würde man in der Gleichung (1) $F = \frac{m}{n} \cdot \frac{1}{2}gh$ und in (2) $F = \frac{m}{n} \cdot \frac{1}{2}(a+b).h$ zu setzen haben.

§. 195. Aufgabe.

Ein Vieleck ABCDE (Fig. 57.) durch Linien, die mit einer gegebenen Linie α parallel sind, in eine vorgeschriebene Anzahl, z. B. 4 gleiche Theile zu theilen.

Aufl. Theile das Vieleck durch Linien aus den Ecken mit α parallel gezogen in Dreiecke und Trapeze, verwandle dasselbe in ein Dreieck FGM, so daß AEa = FGH, AdDa = FHK, DdBb = FKL, BCb = FLM wird, was vermöge §. 189 keiner Schwierigkeit unterliegen kann; theile dann das $\triangle$FGM durch Linien aus F gezogen, FO, FP, FQ, in 4 gleiche Theile; da hier in der Figur $\frac{1}{4}$ des Vielecks $> \triangle$FGH (= $\triangle$ AEa) ist, so schneide den Ueberschuß FHO, der $< \triangle$HFK (= AdDa) ist, vom Trapez AdDa nach dem vorherg. §. durch eine Parallele zu Aa ab; dann ebenso vom Trapez DdBb durch Parallelen zu Dd erst $\triangle$KFP und dann $\triangle$KFQ, so ist durch diese Linien das Vieleck auf die verlangte Art getheilt.

Es leuchtet von selbst ein, welche Abänderungen das Verfahren erleiden müßte, wenn die Theilungspunkte O, P, Q eine andere Lage gegen die Punkte H, K, L haben sollten, als in der Figur angenommen ist.

Anm. Das Obige hat nur zum Zweck, die Möglichkeit der Auflösung der vorgelegten Aufgabe zu zeigen, da die wirkliche Ausführung durch Zeichnungen zu weitläuftig werden würde. Leichter gelangt man durch Rechnung zum Ziele, bei der sich im Wesentlichen derselbe Gang befolgen läßt, der oben für die Zeichnung angegeben ist. Man theilt nehmlich wieder durch Parallelen zu α das Vieleck in Dreiecke und Trapeze, sucht den Inhalt derselben, wozu man nur

nöthig hat, Aa, Dd, Bb und ihre senkrechten Abstände von einander und von C und E (d. h. also im Ganzen 7 Linien) zu messen, vergleicht dann die Inhalte derselben mit $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$ vom Inhalt der ganzen Figur und bestimmt auf dem Wege der Rechnung, in welchen Abständen von E, Aa u. Dd die gesuchten Theilungslinien zu ziehen sind.

§. 196. Zusatz.

In ganz ähnlicher Art sind auch die folgenden Aufgaben zu lösen: Von einem Vieleck durch eine Linie, die mit einer gegebenen parallel ist, ein Stück von vorgeschriebener Größe oder ein Stück, das zum ganzen Vieleck ein bestimmtes Verhältniß hat, abzuschneiden.

Auch die folgende Aufgabe: ein Vieleck in Theile von vorgeschriebenen Verhältnissen so zu theilen, daß die Theilungslinien mit gegebenen Linien α, β, γ... (die erste mit α, die zweite mit β, die dritte mit γ u. s. w.) parallel werden, — läßt sich leicht auf die vorhergehende zurückführen. Man schneidet nehmlich durch eine Parallele zu α das erste vorgeschriebene Stück, dann durch eine Parallele zu β die Summe der beiden ersten vorgeschriebenen Stücke ab u. s. w.

B. Sätze vom Dreieck und Viereck.

§. 197. Lehrsatz.

Wenn man mit der kleinern Seite AC eines Dreiecks ABC (Fig. 58.) aus der Spitze C einen Kreis beschreibt, welcher die Grundlinie in D, die Seite BC in E und ihre Verlängerung in F schneidet, und die Höhe CG zieht, so ist

1) $BF = BC + AC$; 2) $BE = BC - AC$;

3) $BD = BG - AG$; 4) $\sigma = \frac{1}{2}(BAC + ABC)$;

5) $\vartheta = \frac{1}{2}(BAC - ABC)$; 6) $\angle FAE = 90^\circ$;

7) $BD : BE = BF : BA$.

Bew. (1) und (2) sind an sich klar, (3) geht daraus hervor, daß $AG = GD$ ist. — 4) da die Dreiecke ACE und ACB den Winkel ACE gemeinschaftlich haben, so müssen sie auch in der Summe der beiden andern Winkel übereinstimmen; demnach

ist $2\sigma = BAC + ABC$, also $\sigma = \frac{1}{2}(BAC + ABC)$. — 5) Ferner ist $\angle ADC$, als Außenwinkel des Dreiecks CDB, $= DCB + ABC$, folglich $\angle DCB = ADC - ABC$, oder da $\angle ADC = BAC$ ist, $\angle DCB = BAC - ABC$; nun ist aber $\angle DCB$ als Centriwinkel doppelt so groß, als der Peripheriewinkel ϑ, der mit ihm auf dem nehmlichen Bogen DE steht, folglich $\vartheta = \frac{1}{2}(BAC - ABC)$. — (6) folgt aus §. 98, 3. und (7) aus §. 143, 2.

Man kann aber (7) so aussprechen: Der Unterschied zwischen den Abschnitten, in welche die Grundlinie durch die Höhe getheilt wird, verhält sich zum Unterschied der beiden Seiten wie die Summe der Seiten zur Summe der Abschnitte d. h. zur Grundlinie.

Anm. Der vorherg. Satz ist für die Auflösung der sehr lehrreichen und anziehenden Aufgaben nützlich, welche die Zeichnung eines Dreiecks fordern, wenn von den folgenden Stücken irgend drei gegeben sind: Summe oder Unterschied zweier Seiten, Grundlinie, Unterschied ihrer Abschnitte, Höhe, Summe oder Unterschied der Winkel an der Grundlinie.

§. 198. Lehrsatz.

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn die Seiten des einen auf den Seiten des andern senkrecht stehen.

Bew. Wenn die Seiten der Dreiecke ABC und abc (Fig. 59.) oder die Verlängerungen sich unter rechten Winkeln schneiden, so ist zunächst $\angle B = b$, indem in den Dreiecken BDE und bFE, $\angle BDE = bFE = 90°$ und $\angle BED = bEF$ ist. — Ferner ist $\angle BAC = bac$, da im Viereck ADaG $\angle G + D = 180°$, folglich auch $\angle BAC + GaD = 180° = GaD + bac$ ist. — Ebenso kann auch $\angle ACB = acb$ erwiesen werden. Daher ist $\triangle ABC \sim abc$ nach §. 138, 1.

§. 199. Lehrsatz.

1) Wenn man in den Halbirungspunkten der drei Seiten eines Dreiecks Lothe aufrichtet, so schneiden sich die drei Lothe in demselben Punkte, (nehmlich in dem Mittelpunkt des um das Dreieck zu beschreibenden Kreises.)

2) Die drei Linien, welche die Winkel eines Dreiecks halbiren, schneiden sich in demselben innern Punkte, (nehmlich im Mittelpunkt des in das Dreieck zu zeichnenden Kreises.)

3) Fällt man aus den Ecken eines Dreiecks Lothe auf die gegenüberstehenden Seiten, so gehen alle drei durch den nehmlichen Punkt.

4) Die Linien, welche die Ecken eines Dreiecks mit den Mitten der gegenüberstehenden Seiten verbinden, durchschneiden sich in demselben innern Punkte, welcher jede Linie in zwei Stücke theilt, von denen das nach der Ecke zu liegende das doppelte vom andern ist.

Bew. (1) und (2) sind bereits in §. 105 u. 106 erwiesen.

3) Ziehe durch die Ecken des Dreiecks ABC (Fig. 60.) Linien den gegenüberstehenden Seiten parallel; dann ist in den entstandenen drei Parallelogrammen $CD = AB = CE$, $BD = AC = BF$, $AF = BC = AE$. Demnach sind die Seiten des Dreiecks DEF in den Punkten A, B, C halbirt und da die Lothe auf den Seiten des Dreiecks ABC auch auf den Seiten des Dreiecks DEF — und zwar, wie so eben gezeigt, in den Halbirungspunkten derselben — senkrecht stehen, so müssen sich die drei Lothe nach (1) in dem nehmlichen Punkte schneiden.

4) Sind AC und BC (Fig. 61.) in E und D halbirt, so ist $ED \parallel AB$ nach §. 134, folglich $\triangle DEG \sim ABG$ und daher

$$DG : AG = DE : AB.$$

Nun ist aber $DE : AB = CE : CA = 1 : 2$, also auch $DG : AG = 1 : 2$, folglich $AG = 2DG$. — Ebenso ist $BG = 2EG$. Da nun hiernach die Linie AD durch BE, welche B mit der Mitte von AC verbindet, nach dem Verhältniß 1:2 getheilt wird, und offenbar das Nehmliche geschehen muß, wenn man C mit der Mitte der Seite AB verbindet, so muß diese dritte Linie durch denselben Punkt G gehen. Demnach schneiden sich alle drei Linien in dem nehmlichen Punkte.

Anm. Im gleichseitigen Dreieck fallen alle vier Punkte in dem Mittelpunkt (der regulären Figur) zusammen.

§. 200. Lehrſatz.

Die Linie, welche den Winkel an der Spitze eines Dreiecks halbirt, ſchneidet die Grundlinie in zwei Stücke, die ſich wie die anliegenden Seiten verhalten.

Bew. Es ſei $\alpha = \beta$ (Fig. 62.); ziehe $BE \parallel CD$ bis zum Einſchnitt in die verlängerte AC; dann iſt weil $CD \parallel BE$ $\angle \gamma = \alpha$ und $\delta = \beta$, und da $\alpha = \beta$ gegeben iſt, folglich auch $\gamma = \delta$, deshalb $CB = CE$. Nach §. 132 iſt

$$AC : CE = AD : BD$$

oder da $CE = BC$ erwieſen iſt:

$$AC : BC = AD : BD.$$

Anm. Im gleichſchenkligen Dreieck trifft bekanntlich die Halbirungslinie des Winkels an der Spitze die Mitte der Grundlinie, in jedem andern Dreieck fällt nach dem eben Bewieſenen der Durchſchnittspunkt näher an die kleinere Seite.

§. 201. Erklärung.

Auf eine unbegrenzte Linie wird ein Punkt außerhalb derſelben projicirt, wenn man aus dem Punkte ein Loth auf die Linie herabläßt. Der Fußpunkt des Lothes heißt die Projection des gegebenen Punktes. Die Projection eines Punktes in der Linie fällt mit dieſem Punkte ſelbſt zuſammen. — Eine begrenzte Linie wird auf eine unbegrenzte projicirt, wenn man ihre Endpunkte auf dieſelbe projicirt; das von den Projectionen der Endpunkte begrenzte Stück heißt die Projection der gegebenen begrenzten Linie.

§. 202. Lehrſatz.

1) In jedem Dreieck iſt das Quadrat einer Seite, welche einem ſpitzen Winkel gegenüberliegt, kleiner, als die Summe der Quadrate der beiden andern Seiten um das doppelte Rechteck aus der einen dieſer beiden Seiten und der Projection der andern Seite auf die erſtere.

2) Im ſtumpfwinkligen Dreieck iſt das Quadrat der dem ſtumpfen Winkel gegenüberliegenden Seite größer, als die Summe

der Quadrate der einſchließenden Seiten um das Doppelte des eben angeführten Rechtecks.

Setzet man nehmlich in dem Dreieck ABC (Fig. 63. a u. b) der Kürze wegen $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ und die Projection der Seite AC auf die Richtung der Seite AB, $AD = q$, ſo iſt:

1) wenn $\angle A$ ſpitz iſt: $a^2 = b^2 + c^2 - 2cq$,

2) wenn $\angle A$ ſtumpf iſt: $a^2 = b^2 + c^2 + 2cq$. *)

Bew. 1) Nach dem pythagoräiſchen Satze iſt im Dreieck BDC (Fig. 63. a)

$$a^2 = h^2 + BD^2 = h^2 + (c-q)^2 = h^2 + c^2 - 2cq + q^2.$$

Nun iſt aber im rechtwinkligen $\triangle ADC$, $h^2 + q^2 = b^2$; demnach iſt

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cq.$$

2) Eben ſo iſt im rechtwinkligen $\triangle BDC$ (Fig. 63. b):

$$a^2 = h^2 + BD^2 = h^2 + (c+q)^2 = h^2 + c^2 + 2cq + q^2,$$

oder da $h^2 + q^2 = b^2$ iſt:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cq.$$

Anm. Der vorſtehende Beweis ſtützt ſich weſentlich auf die allgemeine algebraiſche Formel $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ und kann daher nicht mehr für rein geometriſch gelten. Es giebt nehmlich für die Ableitung geometriſcher Wahrheiten zwei Wege: den rein geometriſchen und den geometriſch algebraiſchen; ein Beweis hört aber auf rein geometriſch zu ſein, wenn in demſelben auch noch Verbindungen und Umformungen vorkommen, die nicht mehr an den Größen ſelbſt, ſondern nur an ihren Maaßen vollzogen werden können. Alle Größen laſſen überhaupt nur eine dreifache Verknüpfung zu: Addition, Subtraction und die Vergleichung, wie oft die eine (oder ein Theil derſelben) in der andern enthalten iſt, was zum Begriff des Verhältniſſes und der Proportion führt. In einem rein geometriſchen Beweiſe dürfen alſo keine andere Sätze, als die aus der Addition, Subtraction und der Proportionsrechnung angewendet werden. Dagegen iſt es natürlich ganz gleichgültig, ob man im Beweiſe ſich der algebraiſchen Zeichen (+), (−), (=) u. ſ. f. oder der weitläufigern Darſtellung in Worten bedient. Fügt man aber zu jenen algebraiſchen Zeichen z. B. noch das Multiplicationszeichen und verbindet durch daß

*) Der mit der Trigonometrie bekannte Leſer wird ſich erinnern, daß dieſe beiden Gleichungen ſich in die eine

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

zuſammenziehen laſſen.

selbe die Maaße zweier Größen, so kann die Ableitung nicht mehr für rein geometrisch gelten, weil offenbar Größen nicht mit einander multiplicirt werden können. Es versteht sich indeß von selbst, daß das Wesen des rein Geometrischen noch nicht gestört wird, wenn man zur Abkürzung das Rechteck aus den Seiten a und b durch a.b, das Quadrat über der Seite a durch a^2 u. dgl. bezeichnet, so lange man nur mit diesen Zeichen nicht weiter bloß algebraische Umformungen vornimmt, wie z. B. in dem letzten Beweise. — Die in den frühern Abschnitten enthaltenen Sätze sind fast sämmtlich auf rein geometrischem Wege abgeleitet, zunächst ohne Ausnahme alle Sätze bis §. 157. Dagegen können §. 158 — 161, ferner §. 177 — 179 und §. 181 an sich nicht für rein geometrisch gelten; für die übrigen aus diesen abgeleiteten Sätze sind außerdem noch rein geometrische Beweise (in Anmerkungen) angegeben. — Aber auch die oben angeführten algebraischen Formeln:

1) $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$,
2) $(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab$

und eine dritte 3) $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$,

die ebenfalls nicht selten Anwendung findet, lassen sich rein geometrisch aussprechen und erweisen, wie folgt:

1) Das Quadrat über der Summe zweier Linien ist gleich der Summe der Quadrate über den einzelnen Linien vermehrt um das doppelte Rechteck aus denselben.

2) Das Quadrat über der Differenz zweier Linien ist gleich der Summe der Quadrate über den einzelnen Linien vermindert um das doppelte Rechteck aus denselben.

3) Das Rechteck aus der Summe und der Differenz zweier Linien ist gleich dem Unterschied der Quadrate der einzelnen Linien.

Bew. 1) Es sei (Fig. 64.) AB = a, BC = b, so ist:

AD = AH + HD + BL + GE oder
$(a+b)^2 = a^2+b^2+a.b+a.b = a^2+b^2+2ab$.

2) Ferner sei (Fig. 65.) AB = a, BC = b, dann ist:

AH = AD − CD − GD + HD oder
$(a-b)^2 = a^2-a.b-a.b+b^2 = a^2+b^2-2ab$.

3) Endlich sei (Fig. 66.) AB = a, BC = b, so ist

AL = AE + BD − GE − HD oder
$(a+b).(a-b) = a^2+a.b-a.b-b^2 = a^2-b^2$.

Wiewohl es nun eines solchen geometrischen Beweises der obigen Formeln nicht bedurfte, indem dieselben als aus der Arithmetik bekannt vorausgesetzt werden konnten, so pflegt man doch bei geometrischen Entwicklungen dahin zu streben, alle Ergebnisse möglichst ohne Zuziehung arithmetischer Sätze auf rein geometrischem Wege abzuleiten, indem hierbei nicht selten merkenswerthe Beziehungen sich unmittelbar vor Augen stellen, welche in den Formeln der Rechnung vielleicht auf

eine mehr verwickelte und verborgene Weise entstehen sind. Andrerseits hat jedoch auch das arithmetische Verfahren eigenthümliche Vorzüge, indem es häufig rascher zum Ziele führt und zur Auflösung mancher Aufgabe verhilft, die man auf geometrischem Wege zu lösen vielleicht sich vergeblich bemüht hätte. Für den Anfänger ist es eben so anziehend, als belehrend, wo immer möglich, beide Wege einzuschlagen; — anziehend, die Ergebnisse des einen durch die des andern bestätigt zu sehen, belehrend, indem das geometrische Verfahren die Ergebnisse des arithmetischen veranschaulicht und so eine deutlichere Einsicht vermittelt.

§. 203. Lehrsatz.

Wenn man die Spitze eines Dreiecks mit der Mitte der Grundlinie (c Fig. 67.) durch eine Linie (t) verbindet, so ist die Summe der Quadrate der beiden Seiten (a u. b) gleich der Summe aus dem halben Quadrat der Grundlinie und dem doppelten Quadrat der Verbindungslinie, oder in Zeichen:

$$a^2+b^2 = \frac{1}{2}c^2+2t^2.$$

Bew. Bezeichnet man die Projection der Verbindungslinie (Transversale) t auf die Grundlinie mit q, so ist nach dem vorherg. §.

$$a^2 = \frac{1}{4}c^2+t^2+cq$$

und

$$b^2 = \frac{1}{4}c^2+t^2-cq,$$

folglich

$$a^2+b^2 = \frac{1}{2}c^2+2t^2.$$

§. 204. Zusatz.

1) In jedem Parallelogramm ist die Summe der Quadrate der Diagonalen gleich der Summe der Quadrate der vier Seiten (d. h. gleich der doppelten Summe der Quadrate zweier Seiten.)

2) In jedem Viereck ist die Summe der Quadrate der vier Seiten gleich der Summe der Quadrate der Diagonalen vermehrt um das Vierfache des Quadrats der Verbindungslinie der Mittelpunkte der Diagonalen.

Bew. 1) Die Seiten des Parallelogramms (Fig. 68.) seien a, b, die Diagonalen f, g; dann ist nach dem vorherg. §.

$$a^2+b^2 = \frac{1}{2}f^2+\frac{1}{2}g^2$$

oder

$$2a^2+2b^2 = f^2+g^2.$$

2) Die Seiten des Vierecks ſeien nach der Reihenfolge a, b, c, d (Fig. 69.), die Diagonale über a und b ſei f, die andere g, die Verbindungslinie der Mitten der Diagonalen ſei m, endlich ſeien noch die Linien, aus der Mitte von f nach den gegenüberſtehenden Ecken gezogen, mit t und u bezeichnet. — Dann iſt nach dem vorherg. §.:

$$a^2+b^2 = \frac{1}{2}f^2+2u^2 \text{ und } c^2+d^2 = \frac{1}{2}f^2+2t^2,$$

folglich $a^2+b^2+c^2+d^2 = f^2+2(u^2+t^2)$.

Nach demſelben §. iſt aber auch

$$u^2+t^2 = \frac{1}{2}g^2+2m^2,$$

wodurch die vorhergehende Gleichung übergeht in:

$$a^2+b^2+c^2+d^2 = f^2+g^2+4m^2.$$

Anm. Der Anfänger wird wohl thun zu bemerken, daß die Behauptung (1) für das Rechteck und die Raute ſich auch anderweitig leicht ableiten läßt, ſo wie auch daß (1) offenbar ein beſonderer Fall von (2) iſt. — Uebrigens bleibt (2) und der zugehörige Beweis auch dann noch richtig, wenn die Punkte A, B, C, D nicht in derſelben Ebene liegen, und alſo auch die Seiten a, b, c, d kein ebenes Viereck einſchließen.

§. 250. Lehrſatz.

Sind a und b die Seiten eines Dreiecks, l die Halbirungslinie des Winkels an der Spitze, m und n die Stücke, in welche dieſe Linie die Grundlinie theilt, ſo iſt:

$$l^2+m.n = a.b.$$

Bew. Beſchreibe einen Kreis um das Dreieck ABC (Fig. 70.), verlängere CD, bis ſie die Peripherie abermals trifft in E und ziehe BE; dann iſt $\triangle ACD \sim ECB$, folglich

$$b:l+DE = l:a \text{ oder } l^2+l.DE = a.b.$$

Ferner iſt nach §. 143, 1.:

$$DE:m = n:l \text{ oder } l.DE = m.n,$$

daher $l^2+mn = a.b.$

Anm. Daſſelbe läßt ſich auch ohne Zuziehung der Figur durch bloße Rechnung erhalten, indem man l aus a, b, m, n zu beſtimmen ſucht. Bezeichnet man nehmlich die Projectionen von l auf die Seiten a und b, die offenbar gleich ausfallen, mit q, ſo iſt

$m^2 = a^2 + l^2 - 2aq$ und $n^2 = b^2 + l^2 - 2bq$,

folglich $2q = \frac{a^2 + l^2 - m^2}{a} = \frac{b^2 + l^2 - n^2}{b}$

oder $a^2b + bl^2 - bm^2 = ab^2 + al^2 - an^2$,

also $(a-b)l^2 = ab(a-b) - bm^2 + an^2$.

Nun iſt aber nach §. 200 $a:b = m:n$, oder $an = bm$, alſo $-bm^2 + an^2 = -amn + bmn = -(a-b)mn$; hiernach verwandelt ſich die letzte Gleichung in:

$(a-b)l^2 = ab(a-b) - mn(a-b)$

oder $l^2 = ab - mn$.

C. Figuren in und um den Kreis.

§. 206. Lehrſatz.

1) In einem Vieleck, welches eine grade Anzahl Seiten hat und in einen Kreis beſchrieben iſt, betragen der erſte, dritte, fünfte Winkel u. ſ. w. zuſammen eben ſo viel, als der zweite, vierte, ſechste u. ſ. w.

2) Iſt ein Vieleck mit grader Seitenzahl um einen Kreis beſchrieben, ſo iſt die Summe aus der erſten, dritten, fünften Seite u. ſ. w. eben ſo groß, als die Summe aus der zweiten, vierten, ſechsten Seite u. ſ. w.

Bew. 1) Iſt M (Fig. 71. a) der Mittelpunkt des um das Vieleck beſchriebenen Kreiſes, ſo iſt:

$\alpha = \beta,\ \delta = \gamma,\ \varepsilon = \zeta,\ \vartheta = \eta,\ \varkappa = \lambda,\ \nu = \mu,$

folglich $\alpha + \delta + \varepsilon + \vartheta + \varkappa + \nu = \beta + \gamma + \zeta + \eta + \lambda + \mu$

oder $\angle A + C + E = B + D + F.$

2) Nach §. 89, 1. iſt (Fig. 71. b):

$\alpha = \beta,\ \delta = \gamma,\ \varepsilon = \zeta,\ \vartheta = \eta,\ \varkappa = \lambda,\ \nu = \mu,$

folglich $\alpha + \delta + \varepsilon + \vartheta + \varkappa + \nu = \beta + \gamma + \zeta + \eta + \lambda + \mu$

oder $AB + CD + EF = BC + DE + FA.$

Anm. Von dieſen Behauptungen ſind offenbar §. 107, 1. u. 2. beſondere Fälle; während dieſe aber auch umgekehrt richtig ſind, gilt dieß keineswegs allgemein von den vorſtehenden Behauptungen.

§. 207. Lehrſatz.

1) In einem Viereck im Kreiſe iſt das Rechteck der beide Diagonalen gleich der Summe der Rechtecke der gegenüberliegenden Seiten.

2) Die Diagonalen verhalten sich wie die Summen der Rechtecke aus den Seiten, die in ihren Endpunkten zusammenstoßen.

Sind nehmlich die Seiten nach der Reihe a, b, c, d, ist f die Diagonale über a und b, die andere g, so ist:

1) $f.g = a.c+b.d.$

2) $f:g = ad+bc:a.b+c.d.$

Bew. Mache $\angle BAE = CAD$ (Fig. 72. a); dann ist $\triangle BAE \sim CAD$, (weil außerdem auch $\angle ABD = ACD$ ist;) daher verhält sich:

$BE:c = a:f$, also ist 1.1) $BE = \frac{a.c}{f}$.

Ferner ist $\triangle EAD \sim BAC$; denn es ist $\angle EAD = x+z = BAC$ und $\angle ADE = ACB$. In diesen Dreiecken verhält sich:

$ED:b = d:f$; folglich ist 2.2) $ED = \frac{b.d}{f}$.

Aus (1.1) und (2.2) ergiebt sich:

$$BE+ED = g = \frac{a.c+b.d}{f}$$

oder $$f.g = a.c+b.d.$$

2) Sind von einem Viereck im Kreise die Seiten gegeben, ist aber ihre Reihenfolge nicht vorgeschrieben, so lassen sich aus den vier Seiten überhaupt drei verschiedene Vierecke (Fig. 72. a, b u. c) bilden, von denen immer je zwei in einer Diagonale übereinstimmen, indem durch die Größe der Seiten die Größe der Bogen und hierdurch wieder die Größe der Diagonalen bestimmt wird. Heißt nun die neue Diagonale h, so ist nach (1):

$$f.h = a.d+b.c \text{ (Fig. 72. b)}$$

und $$g.h = a.b+c.d \text{ (Fig. 72. c)},$$

folglich $$f:g = a.d+b.c:a.b+c.d.$$

Anm. Die Behauptung (1) heißt der ptolemäische Satz. Auch ist leicht zu sehen, wie mit Hülfe der Gleichungen (1) und (2) die Diagonalen eines Vierecks im Kreise berechnet werden, wenn die Seiten gegeben sind. Setzt man nehmlich aus (2)

$$g = \frac{a.b+c.d}{a.d+b.c}.f$$

in (1), so erhält man:

$$\frac{a.b+c.d}{a.d+b.c}.f^2 = a.c+b.d,$$

also $$f = \sqrt{\frac{(a.c + b.d).(a.d + b.c)}{a.b + c.d}}.$$

Eben so ist: $$g = \sqrt{\frac{(a.c + b.d)\ (a.b + c.d)}{a.d + b.c}}.$$

§. 208. Lehrsatz.

1) Ist ein Vieleck um einen Kreis beschrieben, so ist der Inhalt desselben gleich dem halben Product aus dem Radius des Kreises und dem Umfange des Vielecks.

2) Der Inhalt eines jeden Dreiecks ist gleich dem Product der drei Seiten dividirt durch den vierfachen Radius des umschriebenen Kreises.

3) Der Inhalt eines Vierecks, um welches sich ein Kreis beschreiben läßt, ist gleich dem Product aus den drei Diagonalen, welche man möglicher Weise erhält, wenn man die Seiten verschieden anordnet, dividirt durch den vierfachen Radius des Kreises.

Bew. 1) In Fig. 73. ist Vieleck

$$\begin{aligned} ABCDE &= \triangle AMB + BMC + CMD + DME + EMA \\ &= \tfrac{1}{2}AB.\varrho + \tfrac{1}{2}BC.\varrho + \tfrac{1}{2}CD.\varrho + \tfrac{1}{2}DE.\varrho + \tfrac{1}{2}EA.\varrho. \\ &= \frac{\varrho.(AB + BC + CD + DE + EA)}{2} \\ &= \frac{\varrho.p}{2}, \end{aligned}$$

wo man den Radius des innern Kreises mit ϱ und den Umfang des Vielecks mit p bezeichnet hat.

2) Sind im Dreieck ABC (Fig. 74.) die Winkel A und B spitz, zieht man den Durchmesser $CE = 2r$ und das Loth $CD = h$, so ist der Inhalt des Dreiecks

$$1.1)\quad J = \tfrac{1}{2}h.c.$$

Ferner ist $\triangle BEC \sim DAC$, weil $\angle EBC = 90° = CDA$ und $\angle BEC = BAC$ ist; daher verhält sich:

$$h : a = b : 2r;\ \text{also ist}\ 2.2)\ h = \frac{a.b}{2r}.$$

Dieses in (1.1) eingesetzt giebt:

$$J = \frac{a.b.c}{4r}.$$

3) Die drei verschiedenen Vierecke (Fig. 72. a, b, c), welche sich aus den gegebenen vier Seiten durch verschiedene Anordnung bilden lassen, stimmen offenbar im Inhalte überein, da sie sich um congruente Abschnitte vom ganzen Kreise unterscheiden. — Nun ist in Fig. 72. a Viereck

$$ABCD = \triangle ABC + ACD$$

und daher nach (2) der Inhalt des Vierecks

$$J = \frac{abf}{4r} + \frac{cdf}{4r} = \frac{(ab+cd).f}{4r} = \frac{f.g.h}{4r},$$

indem nach dem Ptolemäischen Satze $a.b+c.d = g.h$ (Fig. 72. c) ist.

§. 209. Lehrsatz.

Ist r der Radius des um ein Dreieck beschriebenen Kreises, ϱ der Radius des hineinbeschriebenen Kreises, und ist d der Abstand der Mittelpunkte beider Kreise, so ist:

$$r:d = d:r-2\varrho,$$

d. h. d ist die mittlere Proportionale zwischen r und $r-2\varrho$.

Bew. Der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises sei D, der des eingeschriebenen E (Fig. 75.); dann ist nach §. 143, 1.:

$$EF.EG = EB.EH \text{ oder } 1)\ (r-d).(r+d) = EB.EH.$$

Nun ist aber zunächst $EH = AH$, indem $\angle HAE = HAC + CAE$, $\angle HEA = HBA + BAE$ und $\angle HAC = HBC = HBA$ und $\angle CAE = BAE$, also auch $\angle HAE = HEA$ ist. Ferner ist $AH = HC$, da $\angle ABH = CBH$ ist; demnach ist auch

$$2)\ EH = HC.$$

Weiter ist $\triangle BEL \sim KCH$, da $\angle BLE = CHK = 90^0$ und $\angle EBL = HBC = HKC$ ist; deshalb verhält sich

$$EB:KC = EL:HC, \text{ also ist}$$

$$3)\ EB.HC \text{ oder } EB.EH = EL.KC = \varrho.2r.$$

Setzt man dieß in (1) ein, so ergiebt sich

$$r^2-d^2 = 2r.\varrho \text{ oder } d^2 = r^2-2r\varrho = r(r-2\varrho).$$

Bemerk. 1. Beschreibt man einen Kreis, welcher eine Seite des Dreiecks und die Verlängerungen der beiden andern Seiten berührt, ist ϱ' der Radius dieses Kreises und d' der Abstand seines Mittelpunktes von dem Mittelpunkt des Kreises

um das Dreieck, so läßt sich auf ganz ähnliche Art, wie oben erweisen die Gleichung:

$$d^2 = r(r+2\rho').$$

Bemerk. 2. Aus den frühern Abschnitten ist leicht zu sehen, wie man in einen Kreis ein regelmäßiges Dreieck, Viereck und Sechseck zeichnet; (das Viereck wird erhalten, wenn man die Enden zweier sich senkrecht schneidenden Durchmesser verbindet; die Zeichnung des Sechsecks folgt sehr leicht aus §. 109, und durch das Sechseck ist offenbar auch zugleich das regelmäßige Dreieck gegeben.) Durch Halbirung der Kreisbogen kann man noch leicht das 8eck, 16eck, 32eck u. s. f. und das 12eck, 24eck, 48eck u. s. w. zeichnen. Die Construction der hier nicht genannten Vielecke ist theils viel verwickelter, theils noch gar nicht gefunden. Ziemlich leicht ist noch die Zeichnung des Fünfecks. Zu dieser führt folgende Ueberlegung: Die Aufgabe, ein Fünfeck zu zeichnen, ist offenbar von der, das Zehneck zu zeichnen, nicht wesentlich verschieden. Ist nun z. B. AB (Fig. 76.), die Seite des Zehnecks, C der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises, so ist im gleichschenkligen Dreieck ABC der Winkel an der Spitze die Hälfte des Winkels an der Grundlinie, nehmlich $C = 36°$, folglich $A = B = 72°$. Halbirt man einen Winkel an der Grundlinie A durch AD, so ist $\angle BAD = 36°$, $\angle B = 72°$, folglich auch $ADB = 72°$, daher $\triangle BDA \sim ABC$ und $AB = AD = DC$, weil $\angle DAC = 36° = DCA$ ist. Nun verhält sich in den ähnlichen Dreiecken ABC und BDA:

$$BC : BA = BA : BD.$$

oder

$$BC : CD = CD : BD,$$

Hierdurch wird die Zeichnung des Fünfecks auf die Auflösung der folgenden Aufgabe zurückgeführt.

§. 210. Aufgabe.

Eine gegebene Linie BC (Fig. 77.) in stätiger Proportion zu theilen, d. h. den Punkt D zwischen B und C so zu bestimmen, daß der größere Abschnitt CD mittlere Proportionale wird zwischen der ganzen Linie BC und dem kleinen Abschnitt BD.

Aufl. Errichte in B das Loth $BE = \frac{1}{2}BC$, beſchreibe aus E mit EB einen Kreis, ziehe CE, welche den Kreis in F und G durchſchneidet, mache $CD = CF$, ſo iſt D der geſuchte Theilungspunkt.

Bew. Nach §. 143, 3. iſt:

$$CG : BC = BC : CF,$$

folglich auch nach §. 131, 11:

$$CG - BC : BC - CF = BC : CF,$$

d. h. $$CD : BD = BC : CD$$

oder $$BC : CD = CD : BD.$$

§. 211. Aufgabe.

In einen Kreis ein regelmäßiges Fünfeck oder Zehneck zu zeichnen.

Aufl. Ziehe einen beliebigen Radius CB (Fig. 76.), theile denſelben in ſtetiger Proportion, ſo daß ſich verhält

1) $BC : CD = CD : BD$.

Dann iſt CD die Seite des Zehnecks und folglich, wenn man $CD = AB = AE$ macht, BE die Seite des Fünfecks.

Bew. Ziehe AC und AD; dann iſt nach (1)

$$BC : AB = AB : BD,$$

folglich nach §. 138, 2. $\triangle ABC \sim DBA$, und daher $\angle \beta = C$ und Seite $AD = AB = CD$, alſo auch $\angle \alpha = C$. Demnach iſt $\angle A = 2C = B$, folglich $A + B + C = 5C$ und $C = \frac{180°}{5} = 36°$. Dem zufolge iſt der Bogen AB 10mal in der Peripherie enthalten, und daher die Linie AB die Seite des Zehnecks.

§. 212. Zuſatz.

Außer den Vielecken, die durch Verdoppelung der Seitenzahl des Zehnecks erhalten werden (Zwanzigeck, Vierzigeck u. dgl.) laſſen ſich nun auch das Fünfzehneck, Dreißigeck u. ſ. f. in den Kreis zeichnen. Macht man nehmlich die Sehne FG = der Seite des Zehnecks (Fig. 76.), FH = der Seite des Sechsecks, d. h. iſt der Bogen $FG = \frac{1}{10}$, $FH = \frac{1}{6}$, ſo iſt $GH = \frac{1}{6} - \frac{1}{10}$

$= 1/15$ von der ganzen Peripherie, also Sehne GH = der Seite des Fünfzehnecks.

§. 213. Lehrsatz.

Verzeichnet man in einen Kreis zwei regelmäßige Vielecke, das eine P_n mit n, das andere P_{2n} mit 2n Seiten, beschreibt man ebenso um diesen Kreis zwei regelmäßige Vielecke Q_n und Q_{2n} mit n und 2n Seiten, so ist:

1) $P_n : P_{2n} = P_{2n} : Q_n$,

2) $2P_n : P_n + P_{2n} = Q_{2n} : Q_n$.

Bew. Es seien AB und AD (Fig. 78.) die Seiten des innern necks und 2ecks; durch D sei die Tangente EF gezogen und $\angle$ ECD und DCF durch CG und CH halbirt; dann sind EF und GH, wie leicht zu sehen, die Seiten des äußern necks und 2ecks. — Nun ist offenbar:

$P_n = n . \triangle ABC = 2n . \triangle ALC$ und $P_{2n} = 2n . \triangle ADC$,

$Q_n = n . \triangle EFC = 2n \triangle . EDC$ und $Q_{2n} = 2n . \triangle GHC$.

Daher verhält sich:

$P_n : P_{2n} = \triangle ALC : ADC = CL : CD$

und $P_{2n} : Q_n = \triangle ADC : EDC = CA : CE = CL : CD$,

folglich $P_n : P_{2n} = P_{2n} : Q_n$.

2) Ferner verhält sich:

$Q_{2n} : Q_n = \triangle GHC : EDC = GH : ED$,

und nach dem Obigen war:

$P_n : P_{2n} = CA : CE = CD : CE = GD : EG$,

weil $\angle$ ECD durch CG halbirt ist; hieraus folgt:

$P_n : P_n + P_{2n} = GD : GD + EG = GD : ED$

und $2P_n : P_n + P_{2n} = 2GD : ED = GH : ED$,

folglich $2P_n : P_n + P_{2n} = Q_{2n} : Q_n$.

Anm. Man kann diese Formeln benutzen, um aus dem Inhalt des innern und äußern necks den Inhalt des innern und äußern 2ecks zu berechnen. Man hat nehmlich aus (1) und (2):

1) $P_{2n} = \sqrt{(P_n . Q_n)}$ und 2) $Q_{2n} = \frac{2P_n Q_n}{P_n + P_{2n}}$.

So ist z. B. der Inhalt des regelmäßigen Vierecks im Kreise, dessen Radius r ist, $= 2r^2$ (gleich 4mal einem rechtw. $\triangle$, dessen Catheten beide $= r$ sind,) und der Inhalt des umschriebenen Vierecks $= 4r^2$

(gleich dem Quadrat des Durchmeſſers $2r$); hieraus ergiebt ſich nach den obigen Formeln der Inhalt des innern Achtecks:

$$= \sqrt{2r^2 . 4r^2} = 2r^2\sqrt{2} = r^2 . 2{,}82843..$$

und der Inhalt des äußern Achtecks:

$$= \frac{2 . 2r^2 . 4r^2}{2r^2+2r^2\sqrt{2}} = \frac{8r^2}{1+\sqrt{2}} = r^2 . 3{,}31371..$$

Hieraus läßt ſich nun auf ganz gleiche Weiſe nach den obigen Formeln der Inhalt des innern und äußern 16ecks, dann des 32ecks, 64ecks u. ſ. f. berechnen. Da nun der Kreis zum Inhalt den Ausdruck $r^2\pi$ hat und zwiſchen jedem Paar innerer und äußerer Vielecke von gleicher Seitenzahl enthalten iſt, während dieſe ſich um ſo weniger von einander unterſcheiden, je größer die Seitenzahl iſt, ſo kann man ſich der angegebenen Rechnung bedienen, um immer engere und engere Grenzen zu erhalten, zwiſchen denen die Zahl π liegen muß. Ein anderes Verfahren, Näherungswerthe für π zu finden, iſt in einem ſpätern §. angegeben.

D. Von Linien, die ſich ſchneiden (Transverſalen).

§. 214. Lehrſatz.

1) Wenn zwei Linien AC und DF (Fig. 79.) von drei Parallelen AD, BE und CF geſchnitten werden, ſo ſind die entſtandenen Abſchnitte proportionirt, nehmlich:

$$AB : BC = DE : EF$$

und umgekehrt, wenn

2) die angegebene Proportion ſtatt findet und zwei von jenen Linien z. B. AD und BE parallel laufen, ſo iſt ihnen auch die dritte CF parallel.

3) Wenn zwei parallele Linien von drei Linien, die aus einem Punkte ausgehen, EC, EG, ED (Fig. 80.) geſchnitten werden, ſo ſind die abgeſchnittenen Stücke proportionirt, nehmlich

$$AF : CG = FB : GD$$

und umgekehrt:

4) drei Linien, welche von zwei Parallelen proportionirte Stücke abſchneiden, vereinigen ſich in demſelben Punkte.

Bew. 1) Ziehe $DM \parallel AC$; dann iſt $AB = DL$, $BC = LM$ (§. 69) und nach §. 132:

$$DL : LM = DE : EF \text{ oder } AB : BC = DE : EF.$$

5) Nach §. 133 iſt:

$$AF:CG = EF:EG = FB:GD.$$

(2) und (4) folgen leicht indirect aus (1) und (3) in ähnlicher Art, wie §. 134 aus §. 132.

§. 215. Erklärung.

Wenn ſich vier Linien $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (Fig. 81.) in ſechs Punkten durchſchneiden, ſo werden von einer jeden durch die drei andern drei Stücke abgeſchnitten, z. B. von α die Stücke AB, AF, BF, von γ die Stücke BC, BD, CD u. dgl., ſo daß alſo im Ganzen 12 Abſchnitte zu unterſcheiden ſind. Je zwei derſelben, wie AB und ED, AF und CD, BF und CE u. ſ. f., deren vier Endpunkte ein Viereck beſtimmen, (d. h. es liegen nicht irgend drei derſelben in grader Linie) nenne ich gegenüberſtehende Abſchnitte. Ferner ſage ich: drei Abſchnitte, wie z. B. AB, CD, EF bilden eine Folge, wenn keiner mit den beiden andern einen Endpunkt gemeinſchaftlich hat.

§. 216. Lehrſatz.

Wenn ſich vier Linien in ſechs Punkten durchſchneiden, ſo iſt das Product aus irgend drei Abſchnitten, welche eine Folge bilden, gleich dem Product der drei gegenüberſtehenden Abſchnitte, (die ebenfalls eine Folge bilden.) — So iſt z. B. (Fig. 81.)

$$1)\quad AB.CD.EF = DE.AF.BC.$$

Bew. Ziehe $FG \parallel BD$; dann iſt zunächſt

$$\frac{FG}{BC} = \frac{AF}{AB},$$

und da $\triangle EFG \sim EDC$ iſt:

$$\frac{CD}{FG} = \frac{DE}{EF}.$$

Aus dieſen beiden Proportionen folgt durch Multiplication

$$\frac{CD}{BC} = \frac{AF.DE}{AB.EF}$$

oder $$AB.CD.EF = AF.BC.DE.$$

§. 217. Zusatz.

Zu der Gleichung (1) im vorherg. §. lassen sich noch folgende, welche ganz auf dieselbe Art erwiesen werden, hinzufügen:

2) AC.BF.DE = DF.CE.AB.

3) AE.BC.DF = BD.EF.AC.

4) AF.BD.CE = CD.AE.BF.

Die Gleichungen (1)—(4) sind jedoch nicht ganz von einander unabhängig; vielmehr erhält man, wenn irgend drei derselben durch Multiplication verbunden werden, die vierte als Ergebniß. — Verknüpft man durch Multiplication je zwei der Gleichungen (1), (2), (3), nehmlich (1) mit (2), (1) mit (3) und (2) mit (3), so gehen folgende vier neue Gleichungen hervor:

5) AC.CD.BF.EF = BC.CE.AF.DF.

6) AB.AE.CD.DF = AC.AF.BD.DE.

7) BC.BF.AE.DE = AB.BD.CE.EF. *)

Anm. Giebt man den obigen Gleichungen (1) bis (4) folgende Formen:

4) BF:CE = (AF:AE).(BD:CD)
2) BF:CE = (AB:AC).(DF:DE)
1) EF:BC = (AF:AB).(DE:CD)
3) EF:BC = (AE:AC).(DF:BD),

so erinnern dieselben lebhaft an §. 132 und 133. Es gelten aber die hier behandelten Gleichungen offenbar in großer Allgemeinheit, während die dortigen nur einen besondern Fall ausdrücken.

§. 218. Lehrsatz.

Wenn man durch die Ecken eines Dreiecks ABC (Fig. 82. a und b) Linien zieht, welche alle durch denselben Punkt G gehen und die Seiten des Dreiecks schneiden, so ist das Product aus drei nicht zusammenstoßenden Abschnitten dem Product der drei andern (ebenfalls nicht zusammentreffenden) Abschnitte gleich, nehmlich AF.BD.CE = BF.CD.AE,

*) Um diese Gleichungen richtig zu verstehen und im Gedächtniß zu behalten, hat man vorzüglich bei (5) die gegenüberliegenden Durchschnittspunkte C und F und die von ihnen ausgehenden Linien, bei (6) A und D und bei (7) (B) und (E) ins Auge zu fassen.

2) und wenn die vorstehende Gleichung gegeben ist, schneiden sich die Linien AD, BE, CF in demselben Punkte.

Bew. 1) Die Linien AB und AD werden von BC und CF in sechs Punkten A, B, C, D, F, G durchschnitten, und es ist folglich nach dem vorherg. §.

$$AF.BD.CG = CD.FG.AB.$$

Eben so werden AB und BE von AC und CF in den Punkten A, B, C, E, F, G durchschnitten, und man hat folglich:

$$CE.AB.FG = BF.CG.AE.$$

Verbindet man diese Gleichung durch Multiplication mit der vorhergehenden, so ergiebt sich

$$AF.BD.CE = BF.CD.AE.$$

(2) folgt sehr leicht indirect aus (1).

Anm. Man kann den vorhergehenden merkenswerthen Satz auch ohne Zuziehung von §. 216 folgendermaßen erweisen:

Wie man leicht sieht, ist (Fig. 82. a u. b.)

$$\triangle ACG : ACF = CG : CF = \triangle BCG : BCF,$$

folglich auch 1) $\triangle ACG : BCG = \triangle ACF : BCF = AF : BF.$

Ebenso ist 2) $\triangle BCG : ABG = CE : AE$

und 3) $\triangle ABG : ACG = BD : CD,$

folglich $1 = AF.CE.BD : BF.AE.CD.$

Uebrigens sieht man auch noch leicht, wie aus diesem allgemeinen Satze die in §. 199 aufgestellten Behauptungen als besondere Fälle abzuleiten sind.

§. 219. Lehrsatz.

Wenn sich vier Linien in sechs Punkten A, B, C, D, E, F (Fig. 83.) schneiden, und man verbindet je zwei gegenüberstehende Punkte durch Diagonalen AD, BE, CF, so theilen sich dieselben gegenseitig in proportionirte Stücke; es verhält sich nehmlich:

1) $AL : DL = AM : DM.$
2) $BM : EM = BN : EN.$
3) $CL : FL = CN : FN.$

Bew. 1) Die Seiten des $\triangle ABD$ sind durch Transversalen, die durch den Punkt E nach den Ecken gezogen sind, getheilt, und es ist daher nach dem vorherg. §.

$$AM.CD.BF = DM.BC.AF.$$

Ferner werden die Linien AB und BD von CL und DL durchschnitten und es ist folglich nach §. 216

$$AL.CD.BF = BC.AF.DL.$$

Verbindet man diese Gleichung durch Division mit der vorhergehenden, so ergiebt sich

$$AM:AL = DM:DL$$

oder

$$AL:DL = AM:DM.$$

Die Gleichungen (2) und (3) sind eben so abzuleiten, wie (1); doch soll um größerer Deutlichkeit willen noch der Beweis für (2) ausgeführt werden. — Die Seiten des Dreiecks BED werden von Transversalen, die durch den nehmlichen Punkt A nach den Ecken B, E, D gezogen sind, vermöge des vorherg. §. so geschnitten, daß

$$BM.EF.DC = EM.DF.BC$$

ist; ferner werden die Linien BE und BD von CF und DF geschnitten; man hat daher nach §. 216

$$EF.DC.BN = BC.EN.DF,$$

und wenn man hiermit die vorherg. Gleichung verbindet:

$$BN:BM = EN:EM.$$

Auf ganz ähnliche Art wird (3) erwiesen.

E. Geometrische Oerter.

§. 220. Erklärung.

Wenn ein Punkt gesucht wird, welcher einer gewissen Bedingung Genüge leistet, und es giebt nicht bloß einen solchen Punkt (oder eine beschränkte Anzahl derselben), sondern es erfüllen alle Punkte einer graden oder krummen Linie die aufgegebene Bedingung, während dieß von keinem Punkte außerhalb der Linie gilt, so sagt man auch: diese Linie sei der geometrische Ort des Punktes, welcher der vorgeschriebenen Bedingung genügt.

So ist z. B. der geom. Ort eines Punktes, der von einem gegebenen Punkte einen vorgeschriebenen Abstand hat, die mit diesem Abstande, als Radius, um den gegebenen Punkt beschrie-

bene Kreislinie; ferner der geom. Ort eines Punktes, der von einer unbegrenzten Linie einen bestimmten Abstand hat, eine mit der gegebenen Linie Parallele; oder der geom. Ort eines Punktes, der von den Enden einer gegebenen begrenzten Linie gleich weit absteht, ein in der Mitte dieser Linie errichtetes Loth; weiter ist nach §. 101, 2. der geometrische Ort der Spitze eines gegebenen Winkels, dessen Schenkel durch die Enden einer gegebenen Linie gehen, ein über dieser Linie, als Sehne beschriebener Kreisbogen u. dgl.

§. 221. Zusatz.

1) Der geometrische Ort eines Punktes, für welchen die Summe der Quadrate seiner Abstände von den Enden einer gegebenen Linie eine bestimmte Größe hat, ist eine Kreislinie.

2) Der geometrische Ort eines Punktes, für welchen der Unterschied der Quadrate seiner Abstände von den Enden einer gegebenen Linie gegeben ist, ist eine grade Linie.

Bew. 1) Die gegebene Linie sei $AB = c$ (Fig. 67.), der gesuchte Punkt C; es sei ferner $BC = a$, $AC = b$, und die Linie, welche C mit der Mitte der Linie AB verbindet, heiße t; dann ist nach §. 203

$$\frac{1}{2}c^2 + 2t^2 = a^2 + b^2$$

oder

$$t^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{1}{4}c^2.$$

Weil aber $a^2 + b^2$ gegeben ist, so wird durch diese Gleichung t bestimmt, und es müssen folglich alle Punkte, welche die vorgeschriebene Bedingung erfüllen, um gleiche Entfernung t von der Mitte der Linie AB abstehen, also in einer aus dieser Mitte mit t beschriebenen Kreislinie liegen. Daß aber auch wirklich sämmtliche Punkte dieser Kreislinie die obige Bedingung erfüllen, fällt nach dem Vorstehenden ohne Weiteres in die Augen.

2) Es sei (Fig. 63. a u. b) $AB = c$ die gegebene Linie, C der gesuchte Punkt, $CD = h \perp AB$, $AD = q$, $BD = p$; dann ist in den rechtwinkligen Dreiecken CDA und CDB

$$q^2 + h^2 = b^2 \text{ und } p^2 + h^2 = a^2,$$

folglich

$$p^2 - q^2 = a^2 - b^2.$$

Da dieſe Gleichung offenbar nicht allein für C, ſondern ganz eben ſo für jeden andern Punkt im Lothe CD gilt, ſo iſt dieſes Loth der geſuchte geometriſche Ort.

§. 222. Aufgabe.

Den geometriſchen Ort eines Punktes zu beſtimmen, deſſen Abſtände von zwei gegebenen Punkten A und B (Fig. 84.) ſich wie zwei gegebene Zahlen m und n verhalten.

Aufl. Iſt $m=n$, ſo halbire AB und errichte im Halbirungspunkte eine Senkrechte; dieſes Loth iſt der geſuchte Ort. — Sind m und n ungleich, iſt z. B. $m>n$, ſo theile AB im Punkte C ſo, daß ſich verhält

$$1)\quad AC:BC = m:n.$$

Ferner verlängere AB über B und beſtimme in der Verlängerung einen Punkt D ſo, daß ſich ebenfalls verhält

$$2)\quad AD:BD = m:n$$

(d. h. $AB:BD = m-n:n$. *)

Halbire CD in M, und beſchreibe mit der Hälfte aus M einen Kreis. Dieſe Kreislinie iſt der geſuchte Ort.

Bew. Daß zunächſt die Punkte C und D der Aufgabe genügen, geht aus der Conſtruction ſelbſt hervor. Um ferner zu zeigen, daß dieſes auch von jedem andern Punkte X der Kreislinie gilt, beſtimme man noch vorher den Radius MC. Hierzu hat man aus (1) und (2) die Proportion

$$AD:BD = AC:BC = m:n,$$

und hieraus:

$$AD+AC:BD+BC = AD-AC:BD-BC = m:n,$$

d. h. $2MA:2MC = 2MC:2MB = m:n$

oder $MA:MC = MC:MB = m:n$,

alſo auch $MA:MX = MX:MB = m:n$.

Demnach ſind die Dreiecke BMX und XMA nach §. 138, 2.

*) Das Erſte wird erhalten, wenn man nach §. 124 AB in $m+n$ gleiche Theile theilt; das Andere, wenn man AB in $m-n$ gleiche Theile theilt, und auf der Verlängerung einen Theil nmal aufträgt.

ähnlich, da sie den Winkel M gemeinschaftlich haben. Hieraus folgt weiter:

$$AX : BX = MA : MX = m : n.$$

Anm. 1. Setzt man der Kürze wegen $AB = a$, $MC = r$, so hat man aus (1) und (2):

$$AC = \frac{ma}{m+n}, \quad BC = \frac{na}{m+n},$$

$$AD = \frac{ma}{m-n}, \quad BD = \frac{na}{m-n},$$

folglich $$CD = \frac{2mna}{m^2-n^2}, \quad r = \frac{mna}{m^2-n^2},$$

$$AM = \frac{m^2a}{m^2-n^2}, \quad BM = \frac{n^2a}{m^2-n^2}.$$

Anm. 2. Ist für einen Punkt die Summe oder Differenz seiner Abstände von zwei festen Punkten gegeben, so ist der Ort im ersten Falle eine Ellipse, im andern eine Hyperbel.

F. Vergleichung des Inhalts und Umfangs gradliniger Figuren.

§. 223. Lehrsatz.

1) Von allen Dreiecken mit gleicher Grundlinie und gleichem Inhalt hat das gleichschenklige den kleinsten Umfang und umgekehrt

2) von allen Dreiecken mit gleicher Grundlinie und gleichem Umfang hat das gleichschenklige den größten Inhalt.

Bew. Ueber derselben Grundlinie AB (Fig. 85.) sei ein gleichschenkliges Dreieck ABC und ein beliebiges anderes Dreieck ABD verzeichnet. Da beide Dreiecke gleichen Inhalt haben sollen, so müssen auch ihre Höhen gleich sein; folglich ist $CD \parallel AB$. — Verlängere BC über C um $CE = AC$ und ziehe ED; dann ist $\triangle ECD \cong ACD$, weil $\angle ECD = CBA = CAB = ACD$ ist, folglich ist $ED = DA$. Nun ist aber

$$BD + DE > BE,$$

also auch $$BD + DA > AC + CB.$$

Demnach hat $\triangle ADB$ einen größern Umfang, als das gleichschenklige $\triangle ACB$.

2) Im Vorhergehenden hat man gesehen, daß das Dreieck ABD (Fig. 86.), wenn es mit dem gleichschenkligen Dreieck ACB einerlei Grundlinie und Höhe hat, dieses im Umfange übertrifft. Dieß wird, wie man leicht begreift, noch mehr der Fall sein müssen, wenn das Dreieck ABD höher ist, als ABC, da sein Umfang dann nach dem eben Bewiesenen größer ist, als der des gleichschenkligen Dreiecks AEB mit derselben Höhe, und der Umfang von AEB wieder größer ist, als der von ACB. — Wenn nun umgekehrt ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit einem andern Dreieck ABD′ einerlei Grundlinie und Umfang hat, so kann vermöge (1) △ ABD′ mit ABC nicht dieselbe Höhe haben, und nach dem eben Bewiesenen kann auch △ ABD′ nicht eine größere Höhe haben, als ABC, weil in beiden Fällen ABD′ auch einen größern Umfang haben würde. Sind also die Umfänge gleich; so hat △ ABD′ eine kleinere Höhe, als △ ABC, also auch einen kleinern Inhalt.

§. 224. Lehrsatz.

Von allen Vielecken mit gleichem Umfange und gleicher Seitenzahl hat das größte gleiche Seiten.

Bew. Denn gesetzt es wäre ABCDEF (Fig. 87.) das größte Vieleck, welches sich mit dem gegebenen Umfang einschließen ließe, und es wären irgend zwei zusammenstoßende Seiten AB und BC ungleich, so errichte man über AC ein gleichschenkliges Dreieck AGC, welches mit ABC einerlei Umfang hat. Dann ist der Umfang des Vielecks AGCDEF von dem des Vielecks ABCDEF nicht verschieden, aber jenes ist an Inhalt größer, als dieses, weil nach dem vorherg. §. △ AGC > ABC ist. Demnach ist ABCDEF nicht das größte mögliche Vieleck, welches den gegebenen Umfang hat, sondern in dem größten müssen alle Seiten gleich sein.

§. 225. Lehrsatz.

Von allen Dreiecken, welche in zwei Seiten übereinstimmen, hat dasjenige den größten Inhalt, bei welchem diese Seiten einen rechten Winkel einschließen.

Bew. Denn nimmt man die eine gegebene Seite zur Grundlinie an, so hat offenbar das Dreieck, in welchem die andere gegebene Seite senkrecht auf der Grundlinie steht, die größte Höhe.

§. 226. Lehrsatz.

Sind von einem Vieleck alle Seiten gegeben bis auf eine, die man willkührlich bestimmen kann, so liegt das größte Vieleck, welches sich mit den gegebenen Seiten einschließen läßt, in einem Kreise, und die willkührlich zu wählende Seite ist der Durchmesser dieses Kreises.

Bew. Es seien von dem Vieleck ABCDEF (Fig. 88.) die Seiten AB, BC, CD, DE, EF gegeben, AF sei die willkührlich bestimmte. Halbire AF in M und beschreibe aus M mit AM einen Kreis, so muß dieser durch sämmtliche Ecken gehen, wenn ABCDEF wirklich das größte Vieleck ist, welches sich aus den angegebenen Stücken bilden läßt. Geht nehmlich der Kreis durch irgend eine Ecke nicht, so läßt sich das Vieleck noch vergrößern und kann also nicht das größte sein. Denn wenn z. B. der Kreis die Ecke C vorbeigeht, so kann man das Vieleck durch die Linien AC und CF in das Dreieck ACF und die beiden Stücke ABC und CDEF zerschneiden. Vergrößert oder verkleinert man nun den Winkel ACF um so viel, daß er ein rechter wird, während man alles Andere ungeändert läßt, (natürlich nimmt auch die willkührlich zu bestimmende Seite AF mit dem Winkel ACF zu oder ab), so wird hierdurch das Dreieck ACF, also auch das Vieleck ABCDEF vergrößert. Soll also ABCDEF das möglich größte Vieleck sein, so muß der Winkel ACF ein rechter sein, oder was dasselbe ist, der aus M mit AM beschriebene Kreis muß durch C gehen. Dasselbe gilt eben so von jeder andern Ecke.

Anm. Um den vorhergehenden Satz richtig zu verstehen, hat man vor allen Dingen zu untersuchen, ob es denn allemal möglich ist, wenn von einem n^{ten} n − 1 Seiten gegeben sind und die n^{te} willkührlich gewählt werden darf, ein Vieleck nach der obigen Vorschrift zu bilden. Die Beantwortung dieser Frage ist um so unentbehrlicher, da die Aufgabe ein neck aus n − 1 gegebenen Seiten s

zu bilden, daß alle Ecken in einem Kreise liegen, welcher die nicht gegebene Seite zum Durchmesser hat, noch nicht allgemein gelöst ist. Wenn sich nun auch nicht angeben läßt, wie im Allgemeinen ein Vieleck von der vorgeschriebenen Art zu bilden sein dürfte, so folgt doch aus dem obigen Beweise leicht, daß dasselbe jedenfalls möglich ist. Denn von allen Vielecken, die in allen Seiten bis auf eine übereinstimmen, ist nothwendig eins das größte, und da jedes, welches die obigen Bedingungen nicht erfüllt, sich noch vergrößern läßt, so muß das größte gewiß diesen genügen; also allemal ein neck existiren, welches die $n-1$ gegebenen Seiten hat, und in einem Kreise liegt, dessen Durchmesser die nicht gegebene Seite ist.

§. 227. Lehrsatz.

Wenn in zwei Kreise zwei Vielecke so beschrieben sind, daß sie zu einer Seite den Durchmesser haben, und alle übrigen Seiten sind in dem einen der Reihe nach so groß gegeben, als in dem andern, so sind auch die beiden Seiten, welche den Mittelpunkt enthalten, gleich, und die Vielecke sind folglich congruent.

Bew. Die Vielecke seien ABCDE und abcde (Fig. 89.); es sei $AB = ab$, $BC = bc$, $CD = cd$, $DE = de$; wäre nun z. B. $AE > ae$, also auch $AM > am$, so müßte, wie man leicht einsieht, $\angle \alpha < \varepsilon$, eben so $\beta < \zeta$, $\gamma < \eta$, $\delta < \vartheta$, also

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta < \varepsilon + \zeta + \eta + \vartheta$$

sein, welches doch nicht möglich ist, da jede dieser beiden Summen $= \pi$ ist. Demnach muß $AE = ae$ und folglich Vieleck $ABCDE \cong abcde$ sein.

Bemerk. Ist ein Vieleck in einen Kreis beschrieben, so kann man die Anordnung der Seiten beliebig ändern; der Inhalt des Vielecks bleibt doch immer derselbe. Denn alle zu bildenden Vielecke unterscheiden sich vom Kreise um congruente Abschnitte.

§. 228. Lehrsatz.

Ist ein Vieleck in einen Kreis beschrieben, so ist es größer, als jedes andere, welches mit ihm gleiche Seiten hat.

Bew. Das in den Kreis beschriebene Vieleck sei ABCDEF (Fig. 90.), das andere, welches mit jenem gleiche Seiten hat, abcdef. Ziehe aus einer Ecke des ersten einen Durchmesser AG,

verbinde G mit C und D, errichte über cd ein $\triangle$ cdg $\cong$ CDG und ziehe ag. Dann sind die Vielecke ABCG und GDEFA entweder beide congruent abcg und gdefa, — dann wäre aber auch offenbar Vieleck ABCDEF $\cong$ abcdef, was gegen die Voraussetzung streitet, — oder es ist nach §. 226 wenigstens eins von jenen größer, als eins von diesen, folglich jedenfalls Vieleck

ABCGDEF > abcgdef,

also auch Vieleck ABCDEF > abcdef.

Anm. Die Ecke A läßt sich allemal so wählen, daß der Durchmesser nicht ganz außerhalb des Vielecks fällt. Allein auch dann, wenn der Mittelpunkt außerhalb des Vielecks liegen sollte, und man hätte die Ecke so gewählt, daß auch der Durchmesser ganz außerhalb des Vielecks fiele, würde sich doch der obige Beweis mit geringer Abänderung beibehalten lassen.

§. 229. Lehrsatz.

Wenn zwei Vielecke in Kreise beschrieben sind und in allen Seiten der Reihe nach übereinstimmen, so sind sie congruent.

Bew. Die gegebenen Vielecke, die in allen Seiten übereinstimmen und beide in Kreise beschrieben sein sollen, seien ABCDEF und abcdef (Fig. 90). Construirt man nun, wie in §. 228, so ist entweder auch ag ein Durchmesser oder nicht. Im ersten Fall wären die Vielecke, wie aus §. 227 leicht abzuleiten ist, congruent; im andern Fall wäre aus den in §. 228 angegebenen Gründen Vieleck ABCDEF > abcdef. Ganz eben so ließe sich aber auch abcdef > ABCDEF erweisen, — was ungereimt ist. Demnach müssen die Vielecke congruent sein.

Anm. Wenn die Mittelpunkte der Kreise innerhalb der Vielecke angenommen werden, so läßt sich der vorstehende Satz in ähnlicher, wie §. 227 beweisen. Die Mittelpunkte können aber auch außerhalb liegen und dann reicht jene Beweisart nicht hin.

§. 230. Lehrsatz.

Unter allen Vielecken mit gleichem Umfange und derselben Seitenzahl ist das regelmäßige am größten.

Bew. Das größte Vieleck muß zunächst nach §. 221 gleichseitig sein, und da von allen Vielecken mit denselben Seiten nach

§. 228 das im Kreise am größten ist, so muß es auch im Kreise liegen, folglich, wie man leicht sieht, gleiche Winkel haben und also regelmäßig sein.

§. 231. Lehrsatz.

Von zwei regelmäßigen Vielecken, die in demselben Kreis beschrieben sind, hat das mit der größern Seitenzahl den größern Umfang und Inhalt.

Bew. Das eine Vieleck habe m, das andere n Seiten, wo. $m > n$ gedacht wird; das erste habe zur Seite DE, das andere AB (Fig. 91.), und es sei $DE \parallel AB$ gezogen. Dann ist

$$AB : DE = AF : DF.$$

Nun ist aber $AD <$ Bogen AD

und $DF >$ Bogen DG,

weil vermöge §. 39, 3. $DF + FE >$ Bog. DE ist; daher ist

$$\frac{AD}{DF} < \frac{\text{Bog. AD}}{\text{Bog. DG}},$$

folglich auch, wenn man beiderseits 1 addirt:

$$\frac{AD + DF}{DF} < \frac{\text{Bog. AD} + \text{Bog. DG}}{\text{Bog. DG}},$$

d. h. $AF : DF <$ Bog. AG : Bog. DG,

also auch $AB : DE <$ Bog. AG : Bog. DG.

Weiter ist aber, da sich offenbar die Centriwinkel zweier regelmäßigen Vielecke umgekehrt, wie die Seitenzahlen verhalten:

Bog. AG : Bog. DG = Bog. AB : Bog. DE = m : n,

folglich $AB : DE < m : n$

oder $n . AB < m . DE$,

d. h. der Umfang des nseits ist kleiner, als der Umfang des mseits in demselben Kreise. Da nun überdieß die Seite des erstern einen kleinern Abstand vom Mittelpunkt hat, als die des andern, und der Inhalt des regelmäßigen Vielecks gleich ist dem halben Product aus dem Umfange und dem erwähnten Abstande, so muß um so mehr das neck einen kleinern Inhalt, als das meck haben.

§. 232. Lehrsatz.

Von zwei regelmäßigen Vielecken, welche um denselben Kreis beschrieben sind, hat das mit der größern Seitenzahl den kleinern Umfang und Inhalt.

Bew. Es habe wieder das eine Vieleck m, das andere n Seiten (m > n), und AB (Fig. 92.) sei die halbe Seite des erstern, AD die halbe Seite des andern; dann ist, wenn man durch F die Linie EG ‖ AD zieht, nach §. 214

$$AD : AB = EG : EF.$$

Weiter ist $EF <$ Bog. AF, aber aus ähnlichen Gründen, wie im vorherg. §.

$$FG > \text{Bog. } FH,$$

daher $FG : EF > FH : AF,$

also auch $FG + EF : EF > FH + AF : AF,$

d. h. $EG : EF > AH : AF,$

folglich auch $AD : AB > AH : AF,$

und da dieses letzte Verhältniß offenbar $= m : n$ ist:

$$AD : AB > m : n$$

oder $nAD > mAB,$

d. h. der Umfang des mecks ist kleiner, als der Umfang des necks. Da die Inhalte zweier Vielecke, die um denselben Kreis beschrieben sind, sich offenbar, wie die Umfänge verhalten, so hat auch das meck einen kleinern Inhalt, als das neck.

Anm. Der Anfänger täusche sich nicht, indem er vielleicht meinen möchte, daß die beiden letzten wichtigen Sätze sich von selbst verständen. Dieß würde richtig sein, wenn nur Vielecke verglichen werden sollten, bei denen die Seitenzahl des einen ein Vielfaches ist von der Seitenzahl des andern. Dagegen wird es, wenn nur z. B. ein Sechseck und ein Siebeneck verglichen werden, allemal eines besondern Beweises für die obigen Behauptungen bedürfen.

§. 233. Lehrsatz.

Wenn zwei regelmäßige Vielecke dieselbe Anzahl der Seiten haben, und eins von den folgenden vier Stücken: Umfang, Inhalt, Radius des umschriebenen Kreises, Radius des hineinbeschriebenen Kreises ist in dem einen Vieleck größer als in dem an-

dern, so sind auch die drei andern Stücke im ersten größer, als im zweiten.

Bew. Nach §. 136, 1. sind regelmäßige Vielecke mit gleichviel Seiten ähnlich; es verhalten sich folglich ihre Umfänge, wie die Radien der umschriebenen Kreise und ihre Inhalte wie die Quadrate dieser Radien; weiter begreift man aber sehr leicht, daß sich auch die Radien der innern Kreise, wie die Radien der äußern verhalten.

§. 234. Lehrsatz.

Von zwei regelmäßigen Vielecken mit gleichem Umfange hat das mit der größern Seitenzahl den größern Inhalt.

Bew. Es habe das eine Vieleck m, das andere n Seiten; jenes sei durch P_m, dieses durch P_n bezeichnet, und es sei $m > n$. Man beschreibe in beide Vielecke Kreise, deren Radien ϱ_m und ϱ_n heißen sollen, und um den Kreis von P_n zeichne man noch ein anderes regelmäßiges Vieleck mit m Seiten, welches mit Q_m bezeichnet sein mag. Da die Vielecke P_n und Q_m um denselben Kreis beschrieben sind, und $m > n$ ist, so hat nach §. 232 das Vieleck Q_m einen kleinern Umfang, als P_n, also auch einen kleinern Umfang, als P_m, da nach der Voraussetzung die Vielecke P_m und P_n einerlei Umfang haben sollten. Die Vielecke Q_m und P_m haben dieselbe Seitenzahl und da, wie man so eben gesehen hat, der Umfang von Q_m kleiner ist, als der von P_m, so muß nach dem vorherg. §. auch der Radius des innern Kreises bei jenem kleiner, als bei diesem, also

$$\varrho_n < \varrho_m$$

sein. Sind aber zwei Vielecke P_n und P_m um Kreise beschrieben, so sind ihre Inhalte nach §. 153 gleich den halben Producten aus den Umfängen und den Radien der innern Kreise ϱ_n und ϱ_m. Nach der Voraussetzung sind hier die Umfänge gleich; also ist dasjenige das kleinere, welches den kleinern Radius hat, d. h.

$$P_n < P_m.$$

§. 235. Zusatz.

Es folgt hieraus insbesondere: Bei gleichen Umfängen ist das gleichseitige Dreieck kleiner, als das Quadrat; das Quadrat kleiner, als das regelmäßige Fünfeck u. s. f. — Umgekehrt bei gleichen Inhalten hat das gleichseitige Dreieck einen größern Umfang, als das Quadrat, das Quadrat einen größern Umfang, als das regelmäßige Fünfeck u. s. f. *)

§. 236. Lehrsatz.

Der Kreis ist größer, als jede gradlinige oder krummlinige Figur, die mit ihm gleichen Umfang hat.

Bew. Unter allen möglichen Vielecken, die man mit einem gegebenen Umfang einschließen kann, haben bei gleicher Seitenzahl die regelmäßigen den größten Inhalt, und die regelmäßigen Vielecke selbst sind um so größer, je größer die Anzahl ihrer Seiten ist. Je mehr Seiten aber ein regelmäßiges Vieleck hat, um so mehr nähert es sich dem Kreise. Es hat daher der Kreis einen größern Inhalt, als jede gradlinige Figur mit demselben Umfange.

Der Kreis ist aber auch größer, als jede krummlinige Figur mit demselben Umfange, indem eine krummlinige Figur, die kein Kreis ist, als ein unregelmäßiges Vieleck mit unendlich vielen Seiten anzusehen ist.

Eilfter Abschnitt.
Rechnungen.

§. 237. Aufgabe.

Aus der Seite a eines gleichseitigen Dreiecks den Inhalt J zu berechnen.

*) Es würde dem Anfänger eine nützliche Uebung gewähren, dieß für die hier genannten Vielecke und das Sechseck aus den später mitzutheilenden Formeln für den Umfang und Inhalt abzuleiten.

Aufl. Ziehe die Höhe h (Fig. 93.), so ist nach dem pythagoriſchen Satze

$$h^2+\frac{1}{4}a^2 = a^2,$$

also $$h^2 = \frac{3}{4}a^2$$

und $$h = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{1}{2}a\sqrt{3},$$

folglich $$J = \frac{1}{2}a.h = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}.$$

§. 238. Aufgabe.

Aus der Seite a und der Grundlinie c eines gleichſchenkligen Dreiecks den Inhalt J zu berechnen.

Aufl. Beſtimme die Höhe h (Fig. 94.) durch die Gleichung

$$h^2 = a^2-\frac{1}{4}c^2;$$

oder $$h = \sqrt{a^2-\frac{1}{4}c^2}.$$

dann iſt $$J = \frac{1}{2}c.h = \frac{1}{2}c\sqrt{a^2-\frac{1}{4}c^2}$$

§. 239. Aufgabe.

Aus den drei Seiten a, b, c eines Dreiecks den Inhalt J zu berechnen.

Aufl. Nimmt man eine Seite, am bequemſten die größte c (Fig. 95.) zur Grundlinie an, ſo hat man nur noch nöthig, die Höhe h zu beſtimmen. Um dieſe zu finden, hat man vor Allem die Abſchnitte p und q zu berechnen, in welche die Grundlinie durch die Höhe getheilt wird. Da man die Summe dieſer Abſchnitte $p+q=c$ kennt, ſo braucht man nur ihre Differenz zu ſuchen, und dieſe läßt ſich ganz leicht beſtimmen, wenn man mit der kleinern Seite b aus der Spitze C einen Kreis beſchreibt der AB in E, BC in F und ihre Verlängerung in G ſchneidet. Dann iſt nach §. 143, 2:

1) $$BE:BF = BG:BA,$$

d. h. $$p-q:a-b = a+b:c,$$

folglich 2) $$p-q = \frac{(a-b).(a+b)}{c} = \frac{a^2-b^2}{c}.$$

Verbindet man nun die beiden Gleichungen

$$p+q=c$$

und $$p-q=\frac{a^2-b^2}{c}$$

einmal durch Addition und dann durch Subtraction, so erhält man im ersten Falle

$$2p=\frac{a^2-b^2}{c}+c=\frac{a^2-b^2+c^2}{c},$$

also 3) $$p=\frac{a^2-b^2+c^2}{2c},$$

und im andern Falle

$$2q=c-\frac{a^2-b^2}{c}=\frac{c^2-a^2+b^2}{c},$$

also 4) $$q=\frac{c^2-a^2+b^2}{2c}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}.$$

Jetzt läßt sich h leicht entweder mit Hülfe von p oder von q bestimmen; wählt man das Letztere, so hat man im rechtw. $\triangle ACD$:

$$h=b^2-q^2=b^2-\frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4c^2}$$

$$=\frac{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{4c^2},$$

folglich 5) $$h=\frac{\sqrt{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}}{2c},$$

und wenn man beiderseits mit $\frac{1}{2}c$ multiplicirt, da $\frac{1}{2}ch=J$ ist:

6) $$J=\frac{1}{4}\sqrt{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}.$$

Bemerkung. Es versteht sich, daß die Gleichung (6) allemal richtig bleibt, welche Seite man sich auch als Grundlinie denken mag; die Gleichung ist also auch dann richtig, wenn die Höhe außerhalb des Dreiecks fällt. Dasselbe gilt daher auch von der Gleichung (5), weil diese als eine nothwendige Folgerung aus jener angesehen werden kann, indem allemal $h=\frac{2J}{c}$ ist. — Mit Hülfe der Gleichung (6) kann man Aufgaben, wie folgende, rein algebraisch auflösen: Die fehlenden Seiten eines Dreiecks zu berechnen, wenn folgende drei Stücke gegeben sind. 1) Die Grundlinie. 2) Der Inhalt oder die Höhe. 3) Die Summe zweier Seiten oder ihre Differenz oder ihr Verhältniß u. dgl. — Der Anfänger wird wohl thun, zu bemerken, daß die Gleichun-

gen in den §§. 227 u. 228 besondere Fälle, von dieser letzten allgemeinen Gleichung sind, aus welcher sich jene besondern Fälle ergeben, wenn man das eine Mal $a = b = c$, und das andere Mal nur $a = b$ setzt.

§. 240. Zusatz.

Die Gleichung (6) läßt sich noch vielfach umformen; löst man das zusammengesetzte Glied auf, so erhält man

A) $J = \frac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}$.

Zieht man dagegen noch mehr zusammen, so kann man ihr auch folgende für das logarithmische Rechnen bequeme Form geben:

B) $J = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c).(a+b-c).(a+c-b).(b+c-a)}$ *)

Endlich kann man der obigen Gleichung auch noch diese Gestalt geben:

C) $J = \frac{1}{4}\sqrt{(b^2+c^2)^2 - (b^2-c^2)^2 - (b^2+c^2-a^2)^2}$,

da, wie man leicht sieht,

$$(b^2+c^2)^2 - (b^2-c^2)^2 = 4b^2c^2$$

ist. In dieser letzten Form ist der Ausdruck für die Benutzung von Tafeln der Quadratzahlen sehr geeignet.

---

*) Setzt man in der bekannten Formel: $u^2 - v^2 = (u+v).(u-v)$, $u = 2bc$, $v = b^2+c^2-a^2$, so verwandelt sich die Gleichung (6) des vorherg. §. in:

$$J = \frac{1}{4}\sqrt{(2bc+b^2+c^2-a^2).(2bc-b^2-c^2+a^2)}$$

oder da $b^2+c^2+2bc = (b+c)^2$ und $b^2+c^2-2bc = (b-c)^2$, also $-b^2-c^2+2bc = -(b-c)^2$ ist:

$$J = \frac{1}{4}\sqrt{[(b+c)^2-a^2].[a^2-(b-c)^2]}.$$

Nun ist aber nach der oben angeführten Formel $(b+c)^2 - a^2 = (b+c+a).(b+c-a)$ und $a^2-(b-c)^2 = (a+b-c).(a-b+c)$, folglich

$$J = \frac{1}{4}\sqrt{(b+c+a).(b+c-a).(a+b-c).(a-b+c)}.$$

§. 241. Zuſatz.

Die Gleichung (1) in §. 239 läßt ſich auch ſo ſchreiben:

$$AB.BE = BG.BF$$

oder $$(p+q).(p-q) = (a+b).(a-b)\ ^*),$$

d. h. das Rechteck aus der Summe und dem Unterſchiede der Abſchnitte der Grundlinie iſt dem Rechtecke aus der Summe und dem Unterſchiede der beiden Seiten gleich. Mit Hülfe dieſer Gleichung iſt man im Stande, wenn von folgenden vier Stücken, Summe und Differenz der beiden Seiten, Summe und Differenz der Abſchnitte der Grundlinie, irgend drei gegeben ſind, leicht das fehlende zu beſtimmen.

§. 242. Aufgabe

Aus den drei Seiten a, b, c eines Dreiecks den Radius r des umſchriebenen Kreiſes und den Radius ϱ des eingeſchriebenen Kreiſes zu berechnen.

Aufl. Nach §. 208 iſt:

$$J = \frac{a.b.c}{4r} \quad \text{und} \quad J = \frac{1}{2}\varrho.(a+b+c).$$

Daraus folgt:

$$r = \frac{a.b.c}{4J} \quad \text{und} \quad \varrho = \frac{2J}{a+b+c},$$

wo man ſtatt J irgend einen der in §. 240 angegebenen Ausdrücke ſetzen kann.

§. 243. Aufgabe.

Aus zwei Seiten a und b eines Dreiecks und dem Radius r des umſchriebenen Kreiſes die fehlende Seite x zu berechnen.

Aufl. 1. Nach dem vorherg. §. iſt:

$$4rJ = abx,$$

oder, wenn man ſtatt J den in §. 240 angegebenen Werth (A) ſetzt:

$$r\sqrt{2a^2b^2+2a^2x^2+2b^2x^2-a^4-b^4-x^4} = abx,$$

*) Dieſelbe Gleichung iſt bereits §. 221 auf etwas anderm Wege erhalten worden.

also wenn man quadrirt:

$$2a^2b^2r^2+2a^2r^2x^2+2b^2r^2x^2-a^4r^2-b^4r^2-r^2x^4 = a^2b^2x^2,$$

oder $$r^2x^4-(2a^2r^2+2b^2r^2-a^2b^2)x^2 = 2a^2b^2r^2-a^4r^2-b^4r^2$$

oder $$x^4-\frac{(2a^2r^2+2b^2r^2-a^2b^2)}{r^2}x^2 = -(a^2-b^2)^2.$$

Hieraus erhält man nach dem bekannten Verfahren, wie quadratische Gleichungen aufgelöst werden (A. § 290):

$$x^2 = \frac{2a^2r^2+2b^2r^2-a^2b^2 \pm \sqrt{(2a^2r^2+2b^2r^2-a^2b^2)^2-4(a^2-b^2)^2r^4}}{2r^2}.$$

Nun ist zunächst $4(a^2-b^2)^2r^4 = (2a^2r^2-2b^2r^2)^2$ und dann weiter nach der bekannten Formel $u^2-v^2 = (u+v).(u-v)$:

$(2a^2r^2+2b^2r^2-a^2b^2)^2-(2a^2r^2-2b^2r^2)^2 = (4a^2r^2-a^2b^2).(4b^2r^2-a^2b^2)$

folglich: $= a^2(4r^2-b^2).b^2.(4r^2-a^2)$;

$$x^2 = \frac{2a^2r^2+2b^2r^2-a^2b^2 \pm ab\sqrt{(4r^2-a^2).(4r^2-b^2)}}{2r^2},$$

oder wenn man Zähler und Nenner mit 2 multiplicirt:

$$x^2 = \frac{a^2(4r^2-b^2)+b^2(4r^2-a^2) \pm 2ab\sqrt{(4r^2-a^2).(4r^2-b^2)}}{4r^2}$$

$$= \left(\frac{a\sqrt{4r^2-b^2} \pm b\sqrt{4r^2-a^2}}{2r}\right)^2.$$

Nimmt man an, daß

$$a > b,$$

also auch $$\sqrt{4r^2-b^2} > \sqrt{4r^2-a^2}$$

und $$a\sqrt{4r^2-b^2} > b\sqrt{4r^2-a^2}$$

ist, so hat man aus der letzten Gleichung, da x, als das Maaß einer Linie eine absolute Zahl bezeichnen muß:

$$x = \frac{a\sqrt{4r^2-b^2} \pm b\sqrt{4r^2-a^2}}{2r}.$$

Es ergeben sich hiernach für x zwei verschiedene Werthe, und wirklich lassen sich in den Kreis mit dem gegebenen Radius r zwei verschiedene Dreiecke (Fig. 96. a u. b) zeichnen, welche beide die gegebenen Seiten a und b haben (und überdieß in den Winkeln, welche der kleinern Seite b gegenüberstehen, übereinstimmen, während die der größern Seite a gegenüberliegenden Winkel sich zu einem Flachen ergänzen.)

Aufl. 2. Zu denſelben Ergebniſſen gelangt man auch auf dem folgenden Wege, bei welchem man weniger zu rechnen hat. Nach dem ptolemäiſchen Satze iſt in Fig. 96. a

$$2rx = az + by, \text{ alſo } 1)\ x = \frac{az + by}{2r}$$

und in Fig. 96. b:

$$az = 2rx + by, \text{ alſo } 2)\ x = \frac{az - by}{2r}.$$

Nun iſt nach dem pythagoriſchen Satze in beiden Fällen:

$$z = \sqrt{4r^2 - b^2} \text{ und } y = \sqrt{4r^2 - a^2},$$

daher aus (1):

$$x = \frac{a\sqrt{4r^2 - b^2} + b\sqrt{4r^2 - a^2}}{2r}$$

und aus (2):

$$x = \frac{a\sqrt{4r^2 - b^2} - b\sqrt{4r^2 - a^2}}{2r},$$

welches genau mit dem oben Gefundenen übereinſtimmt.

§. 244. Aufgabe.

Aus den vier Seiten eines Trapezes a, b, c, d, wo a und b die beiden Parallelen bezeichnen ſollen, den Inhalt des Trapezes J zu berechnen.

Aufl. Ziehe CE ∥ AD (Fig. 97) und CF = x ⊥ AB, ſo iſt:

$$1)\ J = \frac{(a+b).x}{2}.$$

Um x zu erhalten, drücke den Inhalt des Dreiecks BCE einmal durch die Höhe x und die Grundlinie EB = a − b und das andere Mal durch die drei Seiten nach §. 240 (B) aus; dann iſt:

$$2)\ \frac{(a-b).x}{2} =$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{(a-b+c+d).(a-b+c-d).(a-b-c+d).(-a+b+c+d)}.$$

Wird x aus dieſer Gleichung beſtimmt und der erhaltene Werth in die Gleichung (1) eingeſetzt, ſo ergiebt ſich:

$$3)\ J =$$

$$= \frac{1}{4}.\frac{a+b}{a-b}.\sqrt{(a-b+c+d).(a-b+c-d).(a-b-c+d).(-a+b+c+d)}$$

§. 245. Aufgabe.

Aus den Seiten a, b, c, d eines in den Kreis beschriebenen Vierecks den Inhalt J des Vierecks und den Radius r des Kreises zu berechnen.

Aufl. Man könnte eine Diagonale AC (Fig. 98.) ziehen, diese nach §. 207 durch die vier Seiten des Vierecks ausdrücken und dann jedes der beiden Dreiecke ABC und ADC berechnen. Der Ausdruck, welchen man auf diesem Wege erhielte, würde jedoch erst nach mehrfachen Umformungen seine einfachste Gestalt erhalten. Schneller gelangt man zu dieser durch folgendes Verfahren:

Verlängere AB und CD (Fig. 98.) bis zum Durchschnitt in E. Dann ist $\triangle ADE \sim CBE$; denn es ist $\angle E$ beiden gemeinschaftlich und $\angle CBE = ADC$, weil beide mit ABC einen Flachen bilden. Demnach verhält sich:

$$\triangle ADE : \triangle CBE = d^2 : b^2$$

und $$ADE - CBE : CBE = d^2 - b^2 : b^2,$$

d. h. es verhält sich Viereck

$$ABCD : \triangle CBE = d^2 - b^2 : b^2,$$

folglich ist $$ABCD \text{ oder } J = \frac{d^2 - b^2}{b^2} \cdot \triangle CBE.$$

Nach §. 240 (B) ist aber:

$$\triangle CBE = \frac{1}{4}\sqrt{(b+x+y).(b+x-y).(b-x+y).(-b+x+y)}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{(b+[x+y]).(b+[x-y]).(b-[-y]).(x-b+[x+y]).}$$

Zur Bestimmung der beiden unbekannten Seiten x und y des Dreiecks BCE hat man in den ähnlichen Dreiecken BCE und DAE die Proportionen:

$$x : c+y = b : d$$

und $$y : a+x = b : d.$$

Hieraus folgt: $$dx - by = bc$$

und $$dy - bx = ab;$$

und aus diesen Gleichungen erhält man durch Addition und Subtraction: $$d(x+y) - b(x+y) = b(a+c)$$

und $$d(x-y) + b(x-y) = b(c-a),$$

folglich $x+y = \frac{b(a+c)}{d-b}$

und $x-y = \frac{b(c-a)}{d+b}$.

Setzt man dieſe Werthe in den obigen Ausdruck für den Inhalt des $\triangle CBE$, ſo verwandelt ſich derſelbe in:

$$\triangle CBE =$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{\left(b+\frac{b(a+c)}{d-b}\right)\cdot\left(b+\frac{b(c-a)}{d+b}\right)\cdot\left(b-\frac{b(c-a)}{d+b}\right)\cdot\sqrt{\left(-b+\frac{b(a+c)}{d-b}\right)}}$$

$$= \frac{1}{4}b^2\sqrt{\frac{(d-b+a+c)\,(d+b+c-a)\,(d+b-c+a)\,(-d+b+a+c)}{(d+b)^2\,.\,(d-b)^2}}$$

$$= \frac{1}{4}\frac{b^2}{(d+b)\,.\,(d-b)}\cdot\sqrt{(a+b+c-d)\,(a+b-c+d)\,(a-b+c+d)}\cdot\sqrt{(-a+b+c+d)}.$$

Hieraus ergiebt ſich endlich:

$$J = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c-d)\,.\,(a+b-c+d)\,.\,(a-b+c+d)\,.\,(-a+b+c+d)}.$$

Um nun noch den Radius r zu finden, hat man nach §. 208 die Gleichung

$$J = \frac{f\,.\,g\,.\,h}{4r} \quad \text{oder} \quad r = \frac{f\,.\,g\,.\,h}{4J},$$

wo f, g, h die drei möglichen Diagonalen bezeichnen, die ſich bei verſchiedener Anordnung der Seiten des Vierecks ergeben. — Nach dem ptolemäiſchen Satze iſt in Fig. 72. a, b u. c

$$fg = ac+bd,$$
$$fh = ad+bc,$$
$$gh = ab+cd,$$

folglich, wenn dieſe Ausdrücke in einander multiplicirt werden:

$$f^2g^2h^2 = (ab+cd)\,.\,(ac+bd)\,.\,(ad+bc).$$

Demnach iſt $$r = \frac{\sqrt{(ab+cd)\,.\,(ac+bd)\,.\,(ad+bc)}}{4J},$$

wo man für J den oben gefundenen Ausdruck ſetzen kann.

Bemerk. Bei der obigen Herleitung der Formel für den Inhalt des Vierecks iſt angenommen, daß ſich ein Paar gegenüberſtehende Seiten AB und CD ſchneiden. Es können aber auch beide Paar gegenüberſtehender Seiten parallel laufen; dann

wäre aber das Viereck, da im Parallelogramm die gegenüberstehenden Winkel gleich sind und dieselben in jedem Viereck im Kreise einen Flachen ausmachen, ein Rechteck und folglich sein Inhalt

$$J = a.b.$$

Denselben Werth giebt aber auch die obige Formel, wenn man in derselben $a = c$ und $b = d$ setzt; denn sie verwandelt sich dann in:

$$J = \frac{1}{4}\sqrt{2a.2b.2a.2b} = a.b.$$

§. 246. Aufgabe.

Aus dem Radius r eines Kreises und der Seite a eines regelmäßigen Vielecks (necks) in diesem Kreise, die Seite b des Vielecks (2necks) von doppelt so viel Seiten in demselben Kreise und umgekehrt aus der Seite b des 2ecks die Seite a des necks zu berechnen.

Aufl. Zwischen a und b (Fig. 99.) findet folgende Gleichung statt:

$$\frac{1}{4}a^2 + z^2 = b^2.$$

Zur Bestimmung von z hat man im rechtwinkligen Dreieck DEG die Proportion

$$z : b = b : 2r;$$

folglich

$$z = \frac{b^2}{2r}.$$

Setzt man dieses in die vorherg. Gleichung, so erhält man:

$$\frac{1}{4}a^2 + \frac{b^4}{4r^2} = b^2$$

oder

$$a^2r^2 + b^4 = 4r^2b^2.$$

Nach a aufgelöst giebt diese Gleichung

$$a^2 = \frac{4r^2b^2 - b^4}{r^2}$$

oder

$$1) \quad a = \frac{b}{r}\sqrt{4r^2 - b^2}.$$

Wird dieselbe Gleichung nach b geordnet und aufgelöst, so erhält man:

$$b^4 - 4r^2b^2 = -a^2r^2,$$

folglich

$$b^2 = 2r^2 \pm \sqrt{4r^4 - a^2r^2}.$$

Ist a die Seite des regelmäßigen Dreiecks, also b die Seite des Sechsecks, so ist $b = r$; für jedes Vieleck mit mehr Seiten

ist $b < r$, also um so mehr $b^2 < 2r^2$. Daher kann vor der Wurzel in der letzten Gleichung nur das Zeichen (—) gelten, und es ist folglich

$$2)\quad b = \sqrt{(2r^2 - \sqrt{(4r^4 - a^2r^2)}}.$$

§. 247. Aufgabe.

Aus dem Radius r und der Seite a des regelmäßigen necks im Kreise die Seite c des regelmäßigen necks um den Kreis zu berechnen.

Aufl. In Fig. 99. ist:

$$c : a = r : FC, \text{ also } c = \frac{ar}{FC},$$

oder da im rechtw. $\triangle EFC$ $FC = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}a^2}$ ist:

$$3)\quad c = \frac{ar}{\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}a^2}}.$$

§. 248. Aufgabe.

Aus dem Radius r eines Kreises die Seite des in den Kreis beschriebenen regelmäßigen Dreiecks, Vierecks, Fünfecks, Sechsecks, Zehnecks und Fünfzehnecks zu berechnen.

Aufl. 1) Die Seite des Sechsecks ist bekanntlich gleich dem Radius $= r$.

2) Das regelmäßige Dreieck sei ABC (Fig. 100.); ziehe den Durchmesser CD, so halbirt dieser, (wie man leicht einsieht, und auch in §. 110 erwiesen ist,) den Winkel ACB, folglich auch den Bogen AB; demnach ist BD Seite des regelmäßigen Sechsecks $= r$, und daher im rechtw. $\triangle CBD$

$$x^2 + r^2 = 4r^2, \text{ also } x^2 = 3r^2$$

und

$$x = r\sqrt{3}.$$

3) Zur Bestimmung der Seite des Vierecks dient (Fig. 101.) die Gleichung:

$$x^2 + x^2 = 4r^2, \text{ also } x^2 = 2r^2$$

und

$$x = r\sqrt{2}.$$

4) Nach §. 211 wird die Seite x des Zehnecks gefunden, wenn man den Radius in stetige Proportion theilt, so daß sich verhält (Fig. 76.)

$$r : x = x : r - x.$$

Hieraus folgt:

$$x^2 = r^2 - rx$$

oder

$$x^2 + rx = r^2,$$

also

$$x = -\frac{1}{2}r + \sqrt{r^2 + \frac{1}{4}r^2}$$

$$= \frac{-r + \sqrt{5r^2}}{2} = \frac{r(-1+\sqrt{5})}{2}.$$

5) Mit Hülfe der Gleichung (1) in §. 246 läßt sich nun auch leicht die Seite y des Fünfecks berechnen. Setzt man nehmlich in der angeführten Gleichung $a = y$, $b = x$, so erhält man:

$$y^2 = \frac{x^2(4r^2 - x^2)}{r^2}.$$

Nun ist aber so eben gefunden

$$x^2 = \frac{r^2(-1+\sqrt{5})^2}{4} = \frac{r^2(1-2\sqrt{5}+5)}{4} = \frac{r^2(3-\sqrt{5})}{2},$$

folglich

$$4r^2 - x^2 = \frac{8r^2}{2} - \frac{r^2(3-\sqrt{5})}{2} = \frac{r^2(5+\sqrt{5})}{2}$$

und

$$\frac{x^2(4r^2-x^2)}{r^2} = \frac{r^2(3-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}{4} = \frac{r^2(10-2\sqrt{5})}{4},$$

also

$$y = \frac{r\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}.$$

6) Nach §. 212 wird die Seite z des Fünfzehnecks erhalten, wenn man aus demselben Punkte der Peripherie die Seite des Sechsecks $FH = r$ (Fig. 76.) und die Seite des Zehnecks $FG = x$ in den Kreis einträgt und die Endpunkte G und H verbindet. Setzt man nun in der Gleichung des §. 243 z an die Stelle von x, ferner $a = r$ und $b = x$, so verwandelt sich dieselbe in:

$$z = \frac{r\sqrt{4r^2 - x^2} - x\sqrt{3r^2}}{2r} = \frac{\sqrt{4r^2 - x^2} - x\sqrt{3}}{2}.$$

Nun ist aber nach dem Vorhergehenden

$$x = \frac{r(-1+\sqrt{5})}{2} \text{ und } 4r^2 - x^2 = \frac{r^2(5+\sqrt{5})}{2} = \frac{r^2(10+2\sqrt{5})}{4},$$

folglich $z = \frac{1}{4}r(\sqrt{10+2\sqrt{5}} - [-1+\sqrt{5}]\sqrt{3})$.

§. 249. Zusatz.

Nach dem vorherg. §. ist das Quadrat der Seite des Fünfecks

$$= \frac{r^2(10-2\sqrt{5})}{4} = \frac{r^2(5-\sqrt{5})}{2}$$

und das Quadrat der Seite des Zehnecks

$$= \frac{r^2(3-\sqrt{5})}{2},$$

folglich ihre Differenz

$$= r^2.$$

Es bilden daher der Radius, die Seite des Fünfecks und die Seite des Zehnecks ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem die Seite des Fünfecks die Hypotenuse ist.

§. 250. Zusatz.

Durch die Gleichung (2) in §. 246 wird man in den Stand gesetzt, die Seiten der regelmäßigen Vielecke im Kreise zu berechnen, welche 2, 4, 8... mal so viel Seiten haben, als eins der in §. 248 angegebenen, und mit Hülfe der Gleichung in §. 247 kann man auch die Seiten der um den Kreis beschriebenen Vielecke von den angezeigten Seitenzahlen bestimmen.

Bemerk. In früherer Zeit hat man sich der Gleichungen (2) in §. 246 und (3) in §. 247 bedient, um Näherungswerthe für die Zahl π, welche das Verhältniß zwischen Peripherie und Durchmesser ausdrückt, zu erhalten. Am bequemsten geht man hierbei vom Sechseck aus, da dessen Seite dem Radius gleich ist, sucht dann die Seite des 12ecks, 24ecks, 48ecks u. s. w. im Kreise, und bestimmt endlich die Seiten der zugehörigen Vielecke um den Kreis, so geben die Zahlen für die Umfänge dieser Vielecke Grenzen an, zwischen welchen die Peripherie enthalten ist. Man hat auf diese Art, indem der Radius als Einheit angenommen ist, gefunden:

am Kreise	die Seite des eingeschriebenen	die Seite des umschriebenen	den halben Umfang des erstern	den halben Umfang des letztern
6ecks	1,000000..	1,154700..	3,0000..	3,4641..
12ecks	0,517638..	0,535898..	3,1058..	3,2153..
24ecks	0,261052..	0,263305..	3,1326..	3,1596..
48ecks	0,130806..	0,131087..	3,1393..	3,1460..
96ecks	0,065438..	0,065473..	3,1410..	3,1427..
192ecks	0,032723..	0,032727..	3,1414..	3,1418..

Zwölfter Abschnitt.

Von der geometrischen Construction algebraischer Ausdrücke.

§. 251. Erklärung.

Bezeichnet man die in einer Betrachtung vorkommenden Maaße von Linien durch die Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets a, b, c... so nehmlich, daß man einerseits für das Maaß jeder in der Betrachtung vorkommenden Linie allemal einen dieser Buchstaben (also kein anderes Zeichen, insbesondere keine bestimmte Zahl 1, 2, 3 u. dgl.) setzt und andererseits durch diese Buchstaben nichts anderes als Maaße von Linien vorstellt, (also die Maaße anderer Größen, wenn deren zugleich mit in Betracht gezogen werden sollen, durch andere Zeichen ausdrückt,): so sagt man, jeder einzelne dieser Buchstaben habe eine Dimension, und von einem Product, welches zwei, drei... dieser Buchstaben zu Factoren hat, es habe zwei, drei... Dimensionen.

So hat z. B. unter den angegebenen Voraussetzungen jedes der folgenden Producte zwei Dimensionen:

$$ab,\quad 3fg,\quad r^2\pi = rr\pi.$$

Die beiden letzten enthalten zwar drei Factoren, aber die Zeichen 3 und π haben nach dem Obigen auf die Anzahl der Dimenſionen des Products keinen Einfluß.

§. 252. Erklärung.

1) u. 2) Wenn man Ausdrücke, die gleich viele Dimenſionen enthalten, addirt oder von einander ſubtrahirt, ſo hat die Summe oder Differenz eben ſo viel Dimenſionen.

So haben z. B. die folgenden Ausdrücke

$$5abc + 3ax^2$$
$$2axy - bcz$$
$$a^2x - bcy + z^3$$

ſämmtlich drei Dimenſionen.

3) Wenn man zwei Ausdrücke mit einander multiplicirt, ſo hat das Product ſo viel Dimenſionen, als beide zuſammen.

So hat z. B. in dem Product

$$(3ab).(5bcx) = 15ab^2cx$$

der erſte Factor 2, der andere 3 und das Product 5 Dimenſionen.

4) Die Zahl der Dimenſionen eines Bruchs wird erhalten, wenn man von der Zahl der Dimenſionen des Zählers die Zahl der Dimenſionen des Nenners ſubtrahirt. — Dieſe Differenz kann ſowohl poſitiv, als Null oder negativ ſein.

So iſt z. B. in dem Ausdruck

$\frac{a^2+bx}{c}$ die Zahl der Dimenſionen $+1$,

$\frac{a^2b}{cdf}$ „ „ „ „ 0,

$\frac{x}{fgh}$ „ „ „ „ -2.

5) Erhebt man einen Ausdruck in die zweite, dritte... Potenz, ſo hat die Potenz zwei-, drei-... mal ſo viel Dimenſionen.

So hat in dem folgenden Beiſpiel

$$(3abc)^2 = 9a^2b^2c^2$$

der Dignand 3 und die zweite Potenz 6 Dimenſionen und in dem Beiſpiele $\left(\frac{2a^2}{b}\right)^3 = \frac{8a^6}{b^3}$

der Dignand eine und die dritte Potenz drei Dimenſionen.

6) Die Zahl der Dimensionen einer Wurzel wird gefunden, wenn man die Zahl der Dimensionen des Radicanden durch den Wurzelexponenten dividirt. — Dieser Quotient kann sowohl eine ganze, als auch eine gebrochene Zahl sein.

So hat z. B. die folgende Wurzel

$$\sqrt{abcd} \qquad 2 \text{ Dimensionen}$$

und $$\sqrt{a^2x+bxy} \qquad \frac{3}{2} \quad ,$$

§. 253. Erklärung.

Im Folgenden sollen nur solche Ausdrücke, welche gleich viel Dimensionen haben, durch Addition und Subtraction verbunden werden. —

Eine algebraische Summe heißt homogen, wenn alle Glieder derselben gleich viel Dimensionen haben; eben so nennt man auch eine Gleichung homogen, wenn sich in allen Gliedern gleich viel Dimensionen finden.

Anm. 1. Ueber homogene Ausdrücke gelten weiter folgende Bestimmungen: *)

1) Setzt man in einem homogenen Ausdruck, der irgend eine Anzahl Dimensionen hat,

$$\frac{b}{a} = \beta, \text{ also } b = \beta a,$$

$$\frac{c}{a} = \gamma, \quad " \quad c = \gamma a \text{ u. s. f.},$$

wo die Buchstaben β, γ.. ohne Dimension sind, so wird sich der gegebene Ausdruck in ein Product umformen lassen, welches zum einen Factor einen Ausdruck ohne Dimension, zum andern eine Potenz von a hat, deren Exponent gleich ist der Zahl der Dimensionen des gegebenen Ausdrucks.

So ist z. B. für den Ausdruck

$$3b^2c + a^2\sqrt{c^2 - \frac{2ab^2}{c}}$$

die Zahl der Dimensionen = 3 und durch die angegebene Substitution verwandelt sich derselbe in

*) Da diese Sätze für das Verständniß des Folgenden nicht grade unbedingt unentbehrlich sind, so haben sie ihren Platz in einer Anmerkung erhalten.

$$\mathfrak{B}\beta^2 a^2\gamma a + a^2\sqrt{\gamma^2a^2 - \frac{2a\beta^2a^2}{\gamma a}} = a^3\left(\mathfrak{B}\beta^2\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \frac{2\beta^2}{\gamma}}\right),$$

wo die dritte Potenz von a in einen Ausdruck ohne alle Dimension multiplicirt ist. — Dasselbe gilt aber auch allgemein für jeden beliebigen Ausdruck, wie man sich äußerst leicht überzeugen wird, wenn man die in §. 252 angegebenen Fälle einzeln betrachtet, indem außer diesen keine andern Fälle vorkommen können, und für jeden derselben die Richtigkeit des Satzes sogleich in die Augen fällt.

2) Der im Vorhergehenden angezeigte Factor ohne Dimension wird erhalten, wenn man in dem gegebenen Ausdruck $a = 1$, $b = \beta$, $c = \gamma$ u. s. f. setzt.

3) Wie man auch immer einen homogenen Ausdruck, der nicht Null ist, nach den sechs ersten algebraischen Operationen umformen mag, so bleibt doch die Zahl seiner Dimensionen immer dieselbe.

Der gegebene Ausdruck sei kurzweg mit A bezeichnet und habe z. B. 2 Dimensionen; angenommen es sei möglich, ihn in einen andern Ausdruck A′ mit drei Dimensionen zu verwandeln. Dann wird man nach (1) setzen können:

$$A = a^2.\pi \quad \text{und} \quad A' = a^3.\pi',$$

wo π und π' Factoren ohne Dimension bezeichnen. Nach der Annahme soll

$$A = A', \text{ also auch } a^2\pi = a^3\pi' \text{ oder } \frac{\pi}{\pi'} = a$$

sein, welches offenbar unmöglich ist, da die Ausdrücke π und π' den Buchstaben a gar nicht enthalten.

4) Dagegen ist allerdings $o = a - a = bc - bc = dfg - dfg$ u. dgl.

5) Aus dem unter (3) Bewiesenen geht auch die Zulässigkeit der in §. 252 aufgestellten Erklärungen hervor, daß diese nehmlich weder unter sich noch mit der in §. 251 aufgestellten Erklärung in Widerspruch treten können.

6) Wenn man aus einer homogenen Gleichung nach den sechs ersten algebraischen Operationen andere Gleichungen ableitet, so ist auch jede abgeleitete Gleichung homogen; aus einer homogenen Gleichung kann eine heterogene nur dann hervorgehen, wenn man gegen die Vorschrift in §. 253 zwei sich aufhebende Glieder hinzufügt, die in der Anzahl der Dimensionen von den Gliedern der Gleichung abweichen.

Aus einer Gleichung leitet man nach den sechs ersten Operationen andere Gleichungen ab, — abgesehen von den Umformungen, die man mit jeder Seite der Gleichung für sich vornehmen kann, wodurch die Anzahl der Dimensionen nach (3) nicht geändert wird, —

man beiderseits denselben Ausdruck addirt oder subtrahirt, oder mit demselben Ausdruck multiplicirt, dividirt, potenzirt oder radicirt. Vermöge der im Satze selbst aufgestellten Beschränkung und §. 252 erkennt man äußerst leicht, daß in allen diesen Fällen die Zahl der Dimensionen entweder ungeändert bleibt oder auf ganz gleiche Weise vermehrt oder vermindert wird.

7) Durch die mehr erwähnte Vorschrift in §. 253 scheint die Freiheit im algebraischen Operiren eine Beschränkung zu erfahren. Es ist aber bei einigem Nachdenken leicht zu bemerken, daß — wenigstens innerhalb der Anfangsgründe — sich kaum irgendwo Veranlassung findet, jene Vorschrift zu verletzen; denn es sind überhaupt nur zwei Fälle, in denen man zu beiden Seiten einer Gleichung denselben Ausdruck addirt (oder subtrahirt), das eine Mal beim Transponiren, und dieß kann offenbar die Homogenität der Gleichung nicht stören, — das andere Mal, wenn man beim Auflösen unreiner quadratischer Gleichungen das Quadrat vervollständigt. Eine solche Gleichung hat die Form

$$x^2+Px = Q.$$

Ist diese Gleichung homogen, so muß P einen Ausdruck mit einer, Q mit zwei Dimensionen vorstellen, da das erste Glied x^2 zwei Dimensionen hat. Es fällt aber in die Augen, daß die abgeleitete Gleichung

$$x^2+Px+\frac{1}{4}P^2 = Q+\frac{1}{4}P^2,$$

da P^2 zwei Dimensionen hat, ebenfalls homogen ist.

8) Weil aber die abgeleitete Gleichung eben so gut auch als ursprüngliche und die ursprüngliche als aus dieser abgeleitet angesehen werden kann, so folgt weiter aus (6):

Aus einer nicht homogenen Gleichung gehen immer wieder heterogene Gleichungen hervor; es sei denn, daß die gegebene heterogene Gleichung selbst oder eine aus ihr richtig abgeleitete durch Weglassung zweier sich aufhebenden Glieder homogen gemacht werden kann.

9) Weiter ist leicht zu sehen, daß aus der Verknüpfung mehrerer homogenen Gleichungen immer wieder homogene Gleichungen hervorgehen, so lange man nur die in §. 253 aufgestellte, mehr erwähnte Vorschrift nicht verletzt. Hierzu wird man indeß ebenfalls nicht leicht Veranlassung finden; denn die Verknüpfung zweier Gleichungen hat in der Regel keinen andern Zweck, als die Elimination irgend eines beiden gemeinschaftlichen Buchstaben. Es ist aber leicht zu sehen, daß die gewöhnlichen Verfahrungsarten (A. §. 277) allezeit zu einer homogenen Eliminationsgleichung führen, wenn die ursprünglichen Gleichungen homogen sind.

Dagegen läßt sich natürlich nicht behaupten, daß die Verbindung heterogener Gleichungen nothwendig wieder eine heterogene Gleichung liefere.

10) Nach §. 251 sollen hier die Buchstaben a, b, c... die Maaße bestimmter Linien vorstellen. Es hängen daher ihre Werthe von Zweierlei ab, nehmlich sowohl von der Größe dieser Linien selbst, als auch von der Größe der Einheit, mit welcher die Linien gemessen sind. Läßt man die Linien selbst ungeändert, nimmt aber eine andere Einheit an, so erhalten die Buchstaben insgesammt andere Werthe, und zwar sind diese Werthe, wie man leicht einsieht, der Größe der Einheit umgekehrt proportionirt. Sind also a, b, c... die Maaße von Linien für eine gewisse Einheit E, sind ferner a', b', c'... die Maaße derselben Linien für die Einheit E' und ist

$$E = \alpha E', \text{ also } E' = \frac{E}{\alpha},$$

so ist:

$$a' = \alpha a, \quad b' = \alpha b, \quad c' = \alpha c \text{ u. s. f.}$$

Hierauf gründet sich die folgende Behauptung:

11) Eine richtige Gleichung ist nothwendig homogen, vorausgesetzt, daß den in §. 251 aufgestellten Vorschriften genügt ist. — Enthält zunächst die Gleichung keine Wurzelausdrücke und sind aus derselben nach dem Verfahren, welches man beim Anordnen der Gleichungen anzuwenden pflegt, die Brüche weggeschafft und alle Klammern aufgelöst, so werden die Glieder der Gleichung sämmtlich (entweder ganz einfache Zeichen oder) Producte sein. Angenommen nun, die Glieder der Gleichung hätten nicht alle gleich viel Dimensionen, so wird die Gleichung, wenn man alle Glieder auf eine Seite schafft und nach der Zahl der Dimensionen ordnet, eine Form erhalten, wie das folgende Beispiel zeigt:

$$1) \qquad 3ab + (b^2c + 2bcd) - 7a^2c^2 = 0,$$

an welches sich um größerer Anschaulichkeit willen die weitere Entwicklung anschließen soll. — Soll diese Gleichung eine zwischen wirklich vorhandenen oder gedachten Linien statt findende Beziehung ausdrücken oder als aus einer solchen Gleichung algebraisch abgeleitet angesehen werden können, so wird dieselbe richtig bleiben müssen, welches auch immer die zur Einheit angenommene Länge sein mag. Es sei die Einheit, auf welche man sich die Maaße der Linien ursprünglich bezogen gedacht hat, E, irgend eine neue Einheit sei E'; ferner mögen a, b, c... für die neue Einheit übergehen in a', b', c'...; dann ist, wenn

$$E' = \frac{E}{\alpha}$$

ist: $a' = \alpha a, \quad b' = \alpha b, \quad c' = \alpha c$ u. s. f.

Für die Einheit E' verwandelt sich aber die Gleichung (1) in:

$$2) \qquad 3a'b' + (b'^2c' + 2b'c'd') - 7a'^2c'^2 = 0;$$

und aus dieser folgt, wenn man die vorher angegebenen Werthe einsetzt:

$$3) \qquad 3ab \cdot \alpha^2 + (b^2c + 2bcd) \cdot \alpha^3 - 7a^2c^2 \cdot \alpha^4 = 0.$$

Nun erhält α immer andere Werthe, wenn man dem E' andere Werthe beilegt, während die Buchstaben a, b, c... ihre Werthe un-

geändert beibehalten, und da man dem E' unzählig verschiedene Werthe beilegen kann, so wird auch α unzählig viele verschiedene Werthe annehmen können. Eine jede algebraische Gleichung läßt aber nur eine beschränkte Anzahl von Auflösungen zu, und es kann daher auch die Gleichung (3) nicht für unzählige verschiedene Werthe von α gelten. Demnach muß auch die Gleichung (1) unrichtig sein, weil (3) mit Nothwendigkeit aus derselben folgt.

Die obige Behauptung bleibt aber auch dann noch richtig, wenn in der Gleichung Wurzelausdrücke vorkommen. Denn enthält zunächst eine heterogene Gleichung nur solche Wurzelausdrücke, in denen die Radicanden homogene Ausdrücke sind, so läßt sich die Unstatthaftigkeit der Gleichung ganz in ähnlicher Art, wie oben, zeigen. — Ist unter den Wurzelausdrücken nur einer, dessen Radicand eine heterogene algebraische Summe ist, wie in der folgenden Gleichung:

$$a\sqrt{b^2+cd} + 3fg - b\sqrt[3]{2ab+c^3} = 0,$$

so kann man diesen Ausdruck auf eine, alle übrigen Glieder auf die andere Seite bringen und den Wurzelausdruck durch Potenziren wegschaffen, wo dann die Unrichtigkeit der Gleichung aus dem vorher Erwiesenen folgt. Sind aber solcher, zumal höherer Wurzeln mehrere vorhanden, so reichen die angezeigten Verfahrungsarten nicht aus.*)

Man kann sich jedoch in diesem und allen andern Fällen auf folgende Weise davon überzeugen, daß die heterogene Gleichung nicht durch richtige Behandlung einer wirklich vorhandenen Verbindung von Größen entstanden sein kann. Denn eine Gleichung zwischen Maaßen von Größen ist entweder der unmittelbare Ausdruck einer zwischen den Größen statt findenden Beziehung, oder sie ist aus einer solchen Gleichung oder aus mehreren durch algebraische Operationen abgeleitet. Nun begreift man bei einiger Ueberlegung sehr bald, daß in einer ursprünglichen Gleichung, welche als unmittelbarer Ausdruck der zwischen den Größen obwaltenden Beziehung anzusehen ist, die Maaße nur durch directe algebraische Operationen verbunden sein können, oder doch, daß jede solche Gleichung als aus einer Gleichung, die nur directe Operationen enthält, hervorgegangen angesehen werden kann und daher mit Nothwendigkeit das Vorhandensein dieser letztern fordert. (So gehört zu der einfachsten indirecten Gleichung: $a-b=c$ die directe: $a=b+c$.) Demnach kann eine ursprüngliche Gleichung niemals Wurzelausdrücke enthalten, und sie ist daher nach dem vorher Bewiesenen nothwendig homogen. Die Wurzelausdrücke können nur durch

*) Die Mittel, welche dahin führen, mehrere Wurzelausdrücke aus einer Gleichung wegzuschaffen, sind zu weitläufig und finden zu selten Anwendung, um in den Anfangsgründen eine Stelle zu erhalten — Der Anfänger, der sich hierüber zu belehren wünscht, kann unter andern nachlesen: Meier Hirsch, Aufg. aus der Theorie der algebr. Gleichungen, S. 106 u. f.

algebraische Umformungen und Verknüpfungen der ursprünglichen Gleichungen entstanden sein. Weil aber nach (6) und (9) homogene Gleichungen nur immer wieder homogene Gleichungen (bei Beachtung der Vorschrift in §. 253) liefern, so kann auch die heterogene Gleichung nicht aus diesen und also auch überhaupt nicht aus der richtigen Behandlung eines wirklichen Falles entstanden sein.

12) Dagegen versteht es sich von selbst, daß man durch Anbringung zweier sich aufhebenden Glieder auch richtige heterogene Gleichungen bilden kann.

Anm. 2. Es ist leicht zu sehen, daß die vorhergehenden Sätze nicht allein von Linien gelten, sondern sich mit Beibehaltung derselben Schlußfolgen auf alle andern Größen übertragen lassen. Es hätten dieselben daher auch eben so gut in der allgemeinen Größenlehre abgehandelt werden können; sie haben indeß hier ihren besondern Platz erhalten, weil sie sonst nicht leicht Anwendung finden. —

Uebrigens können jene Sätze in vielen Fällen dazu dienen, das Fehlerhafte einer Rechnung zu erkennen, da jede heterogene Gleichung nothwendig unrichtig ist.

§. 254. Lehrsatz.

1) Der Ausdruck für das Maaß einer Linie hat allemal eine Dimension.

2) Der Ausdruck für das Maaß einer Fläche hat zwei Dimensionen.

Bew. 1) Die Richtigkeit dieser Behauptung ist eine unmittelbare Folge der Erklärung in §. 251.

2) Sind g und h die Maaße der Grundlinie und Höhe eines Rechtecks, so ist die Zahl für den Inhalt desselben

$$= g.h.$$

Dieser Ausdruck hat zwei Dimensionen, und dasselbe gilt für die Inhalte aller andern Figuren, da dieselben sämmtlich durch Zurückführung auf ein Rechteck (§. 160, 179 u. 181) erhalten sind.

Anm. Ganz streng folgt die Allgemeingültigkeit der beiden vorstehenden Behauptungen jedoch nur aus (11) in der Anmerk. 1 zum vorherg. §. Denn was insbesondere die zweite anbelangt, so kann offenbar jede beliebige Figur als einem Rechteck gleich gedacht werden, und da der Inhalt des Rechtecks zwei Dimensionen hat, so muß das Nehmliche auch, wie a. a. O. gezeigt ist, von jedem für denselben zu setzenden gleichen Ausdruck gelten.

Bemerk. In der Stereometrie wird bewiesen, daß der Inhalt eines rechtwinkligen Parallelepipedum, dessen Läng

und Höhe die Maaße a, b, c haben, gleich dem Product a.b.c iſt, welches drei Dimenſionen hat. Es muß daher daſſelbe auch für den Inhalt eines jeden andern Körpers gelten, da man ſich immer ein Parallelepipedum denken kann, welches mit dem gegebenen Körper gleichen Inhalt hat.

§. 255. Erklärung.

Bezeichnen, wie auch früher, a, b, c, d... die Maaße von Linien, und ſtellt x irgend einen aus dieſen Buchſtaben zuſammengeſetzten algebraiſchen Ausdruck vor, ſo wird man die Linie, deren Maaß x iſt, wenn im beſondern Fall für die Buchſtaben a, b, c... beſtimmte Zahlen gegeben ſind, dadurch erhalten können, daß man den Zahlenwerth von x berechnet und dann die Einheit ſo oft auf eine Linie aufträgt, als dieſer Werth anzeigt. — Es tritt aber auch häufig der Fall ein, daß nicht ſowohl die Maaße a, b, c... in beſtimmten Zahlen, ſondern die Linien ſelbſt, deren Maaße jene Buchſtaben vorſtellen, gegeben ſind, und verlangt wird, mit Hülfe dieſer Linien durch geometriſche Conſtruction eine Linie darzuſtellen, welche den Ausdruck x in allen Fällen zum Maaße hat, welches auch immer die Einheit und die beſondern Zahlenwerthe der Buchſtaben a, b, c... ſein mögen. Man ſagt dann: *der Ausdruck x ſolle geometriſch conſtruirt werden.*

§. 256. Aufgabe.

Die folgenden Ausdrücke geometriſch zu conſtruiren:

1) $x = a+b$, 2) $x = a-b$,

3) $x = \frac{a.b}{c}$. 4) $x = \frac{a^2}{c}$,

5) $x = \sqrt{a.b}$ 6) $x = a\sqrt{m}$,

7) $x = \sqrt{a^2+b^2}$ 8) $x = \sqrt{a^2-b^2}$,

wo in (6) m nicht das Maaß einer Linie, ſondern überhaupt irgend eine abſolute Zahl und alſo ohne Dimenſion ſein ſoll.

Aufl. Die Conſtructionen von (1) und (2) ſind an ſich klar.

Die Gleichung (3) liefert folgende Proportion:

$$c : b = a : x;$$

hiernach ist x die vierte Proportionale zu a, b, c *) und wird erhalten, wenn man von den Schenkeln eines beliebigen Winkels DE = c, DF = b, EG = a (Fig. 102.) abschneidet, E mit F verbindet und GH || EF zieht; dann ist FH = x. — Oder mache auf den Schenkeln eines beliebigen Winkels (Fig. 103.) DE = c, DG = b, DF = a, ziehe EF und damit parallel GH, so ist DH = x. — Oder zeichne wieder einen beliebigen Winkel DEF (Fig. 104.), mache DE = c, EF = b, trage auf DE die Linie DG = a, ziehe DF und GH || EF bis zum Einschnitt in die Linie DF; dann ist HG = x.

Die Gleichung (4) ist ein besonderer Fall von (3), der entsteht, wenn man b = a setzt. Man wird also (4) eben so, wie (3) zu construiren, aber b durch a zu ersetzen haben. Außerdem ergeben sich auch noch leicht folgende Constructionen: Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck mit den Catheten c und a (Fig. 99.), errichte im Endpunkte der Cathete a auf der Hypotenuse ein Loth, welches von der rückwärts verlängerten Cathete c ein Stück abschneidet, das = x ist. — Oder beschriebe über c (Fig. 106), wenn dieses > a ist, einen Halbkreis, lege in denselben die Sehne a und projicire a auf c; die Projection ist x. — Ist c < a, so bilde ein rechtwinkliges Dreieck (Fig. 107) mit der Cathete c und Hypotenuse a, errichte in dem Endpunkt von a, der c gegenübersteht, ein Loth, welches die verlängerte Cathete c durchschneidet. Die Hypotenuse des entstandenen großen Dreiecks ist x.

Die Gleichung (5) läßt folgende Umformungen zu:

$$x^2 = a.b \quad \text{oder} \quad a : x = x : b.$$

Demnach wird x erhalten, wenn man nach §. 145 die mittlere Proportionale zu a und b sucht. — Zu demselben Zweck führt auch folgende Construction: Mache AB = a, AC = b (Fig. 108.),

*) Auch hier wird der Kürze wegen, wie schon in der Bemerk. zu §. 139 angegeben worden, die Linie, deren Maaß x ist, die Linie x genannt.

beſchreibe irgend einen Kreis, der durch B und C geht und ziehe aus A eine Tangente AD an den Kreis. Dieſe iſt = x. (§. 143, 3.)

Aus der Gleichung (6) folgt

$$x^2 = ma^2 = ma \cdot a.$$

Man findet daher x nach (5) als mittlere Proportionale zu ma und a.

In der Gleichung (7), die ſich auch ſo ſchreiben läßt:

$$x^2 = a^2 + b^2,$$

iſt x die Hypotenuſe eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Cathéten a und b.

In der Gleichung (8) oder

$$x^2 = a^2 - b^2$$

iſt von einem rechtwinkligen Dreieck die Hypotenuſe a und eine Cathete b gegeben, die andere geſucht. Dieſe wird erhalten, wenn man den einen Schenkel eines rechten Winkels = a macht (Fig. 109.) und aus dem Endpunkt einen Kreis mit a beſchreibt, der vom andern Schenkel x abſchneidet. — Oder beſchreibe über a (Fig. 110.) einen Halbkreis und lege b als Sehne hinein. Die Verbindungslinie der Endpunkte iſt x.

Anm. Zu den im Vorhergehenden angegebenen mehrfachen Conſtructionen ließen ſich noch leicht andere hinzufügen. Es iſt indeß auch nicht die Abſicht des Vorſtehenden, alle möglichen Verfahrungsarten aufzuzählen, ſondern nur diejenigen herauszuheben, welche am häufigſten Anwendung finden.

§. 257. Zuſatz.

Außer den im vorherg. §. angeführten Ausdrücken ſind auch noch die, (aber keine andern,) welche aus jenen zuſammengeſetzt oder auf dieſelben zurückführbar ſind, einer geometriſchen Conſtruction fähig; — ſo folgende Beiſpiele:

9) $x = \frac{abc}{df}$.

Suche zuerſt eine Linie $z = \frac{ab}{d}$ und dann $x = \frac{zc}{f}$ $\left(= \frac{abc}{df}\right)$, beides nach (3) im vorherg. §.

10) $x = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$.

Bestimme erst eine Linie z aus der Gleichung

$$z^2 = a^2 + b^2,$$

dann ist $x = \sqrt{z^2 - c^2}$.

11) $x = \sqrt{a^2 + ab}$.

Suche eine Linie z aus der Gleichung

$$z^2 = ab,$$

dann ist $x = \sqrt{a^2 + z^2}$.

Oder, was viel bequemer ist, da sich die Gleichung (11) auch so umformen läßt:

$$x = \sqrt{a(a+b)},$$

suche die mittlere Proportionale zu a und a+b.

12) $x = \sqrt{ab + cd}$.

Suche zwei Linien u und v aus den Gleichungen

$$u^2 = ab \text{ und } v^2 = cd,$$

dann ist $x = \sqrt{u^2 + v^2}$.

Oder setze

$$x = \sqrt{a\left(b + \frac{cd}{a}\right)}$$

und bestimme erst eine Linie

$$z = \frac{cd}{a}$$

und dann $x = \sqrt{a(b+z)}$.

Bemerk. Durch die letzten §§. wird man in vielen Fällen in den Stand gesetzt, geometrische Aufgaben auf die Art zu lösen, daß man für die Maaße der gegebenen Linien irgend Buchstaben setzt, aus diesen die Maaße der gesuchten Linien, von deren Kenntniß die Auflösung der Aufgabe abhängt, berechnet und diese Ausdrücke dann nach dem Vorhergehenden construirt. Beispiele liefern die nächsten §§.

§. 258. Aufgabe.

Ein Rechteck in ein anderes mit einer gegebenen Seite zu verwandeln.

Aufl. Das gegebene Rechteck habe die Seiten a und b, die gegebene Seite des neuen Rechtecks heiße c, die gesuchte x. Dann hat man zur Bestimmung von x die Gleichung:

$$cx = ab,$$

also $$x = \frac{ab}{c} \text{ oder } c:b = a:x.$$

Construction. Das gegebene Rechteck sei DEFG (Fig. 111.); mache DH = c, ziehe HL (= a) parallel zu DG, ziehe DL bis zum Einschnitt in die verlängerte EF, so ist EN = x; denn es verhält sich offenbar

$$c:b = a:EN.$$

Zieht man nun noch NM || ED und verlängert DG und HL bis zum Einschnitt in diese Parallele, so ist DHOM das verlangte Rechteck.

Beweis. Die durch Rechnung aufgefundene Construction läßt sich leicht rein geometrisch nachweisen. Es ist nehmlich nach §. 154 Rechteck ML = LE, also auch ML + GH = LE + GH, h. d. MH = GE.

Anm. Eines solchen geometrischen Beweises bedarf es nun zwar eigentlich nicht, wenn man richtig gerechnet und nach Anleitung der §§. 256 u. 257 construirt hat. Andererseits aber gewährt diese Ableitung und Vergleichung des arithmetischen und geometrischen Verfahrens dem Anfänger eine eben so nützliche, als anziehende Uebung.

§. 259. Aufgabe.

Ein Quadrat zu zeichnen, welches 5mal so groß ist, als ein gegebenes Quadrat.

Aufl. Hat das gegebene Quadrat die Seite a, das gesuchte die Seite x, so soll sein

$$x^2 = 5a^2.$$

Diese Gleichung läßt sich so schreiben:

1) $$x^2 = 5a.a,$$

und dann wird x als mittlere Proportionale zu a und 5a erhalten. — Man kann aber der Gleichung (1) auch die Form

2) $$x^2 = (2a)^2 + a^2$$

geben, und dann ist x die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, welches die Catheten a und 2a hat.

Endlich kann man auch setzen

3) $x^2 = 9a^2 - 4a^2 = (3a)^2 - (2a)^2,$

wonach ſich x als Cathete eines rechtwinkligen Dreiecks ergiebt, in welchem die andere Cathete = 2a und die Hypotenuſe = 3a iſt.

§. 260. Aufgabe.

Eine gegebene Linie in ſtetige Proportion zu theilen.

Aufl. Die gegebene Linie ſei a, der größere Abſchnitt x, alſo der kleinere a—x; dann iſt die Bedingungsgleichung

$$a : x = x : a - x$$

oder $$x^2 = a^2 - ax$$

oder $$x^2 + ax = a^2.$$

Hieraus folgt auf bekannte Weiſe (vergl. A. §. 290)

$$x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}a^2} = \frac{a(-1 \pm \sqrt{5})}{2}.$$

Weil aber x als Maaß einer Linie eine abſolute Zahl ſein muß, ſo kann vor der Wurzel nur das Zeichen (+) gelten.

Conſtruction. Errichte im Endpunkte B der Linie CB = a (Fig. 77.) ein Loth $BE = \frac{1}{2}a$, ziehe $CE\left(= \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}a^2}\right)$, ſchneide EB von EC gleich EF ab, ſo iſt CF = x. Wenn man daher CD = CF macht, ſo iſt D der geſuchte Theilungspunkt.

Anm. Die hier angegebene Conſtruction ſtimmt ganz mit der in §. 210 aufgeſtellten überein, wo man auch den geometriſchen Beweis derſelben nachzuſehen hat. Durch die Rechnung wird aber jene Conſtruction in ein viel klareres Licht geſtellt, indem man hier ſogleich die Gründe der einzelnen Schritte des Verfahrens, und wie dieſelben dem Ziele entgegenführen, klar und deutlich einſieht, was weit weniger von der rein geometriſchen Behandlung gilt.

§. 261. Aufgabe.

Ein rechtwinkliges Dreieck ſo zu zeichnen, daß die Hypotenuſe einer gegebenen Linie a gleich wird und die beiden Catheten ſich wie zwei gegebene Linien m und n verhalten.

Aufl. Denkt man ſich das Dreieck bereits den vorgeſchriebenen Bedingungen gemäß gezeichnet, ſo hat man zur Beſtimmung der Catheten x und y die Gleichungen:

1) $x : y = m : n.$

2) $x^2 + y^2 = a^2.$

Aus (1) ergiebt sich

$$x = \frac{my}{n}.$$

Dieser Werth, in die Gleichung (2) eingesetzt, verwandelt dieselbe in:

$$\frac{m^2y^2}{n^2} + y^2 = a^2$$

oder $$m^2y^2 + n^2y^2 = a^2n^2$$

oder $$y^2 = \frac{a^2n^2}{m^2+n^2},$$

folglich $$y = \frac{an}{\sqrt{m^2+n^2}}$$

und $$x = \frac{my}{n} = \frac{am}{\sqrt{m^2+n^2}}.$$

Constr. Um den Werth von y zu construiren, hat man zuerst eine Linie $v = \sqrt{m^2+n^2}$ und dann $y = \frac{an}{v}$ zu suchen. Hieraus ergiebt sich folgendes Verfahren: Schneide von den Schenkeln eines rechten Winkels $AB = m$, $AC = n$ (Fig. 112.) ab, ziehe die Hypotenuse $CB (= \sqrt{m^2+n^2})$, mache $CD = a$ und ziehe durch D mit AB die Parallele DE bis zum Einschnitt in die verlängerte AC; dann hat man nicht allein $EC = y$, sondern auch zugleich $ED = x$ erhalten, und ECD ist folglich das verlangte Dreieck.

Bew. Denn es hat die verlangte Hypotenuse a, und die Catheten x und y verhalten sich wie die gegebenen Linien m und n vermöge §. 133.

§. 262. Aufgabe.

Ein Rechteck zu zeichnen, von welchem der Umfang $= p$ und der Inhalt $= a^2$ gegeben ist.

Aufl. Sind x und y die Seiten des gesuchten Rechtecks, so soll sein:

1) $2x + 2y = p$

und 2) $xy = a^2$.

Aus (1) folgt 3) $x = \frac{1}{2}p - y$.

Dieß in (2) eingesetzt giebt:

$$\frac{1}{2}py - y^2 = a^2$$

oder $y^2 - \frac{1}{2}py = -a^2$.

Daraus folgt auf bekannte Weise

$$y = \frac{1}{4}p \pm \sqrt{\frac{1}{16}p^2 - a^2}$$

und hieraus u. aus (3) $x = \frac{1}{4}p \mp \sqrt{\frac{1}{16}p^2 - a^2}$.

Obgleich für x und y zwei Werthe gefunden sind, so sieht man doch leicht, daß die Aufgabe nur eine Auflösung hat, da die Werthe von x und y sich vertauschen lassen. Soll also x die größere, y die kleinere Cathete sein, so wird man zu setzen haben:

$$x = \frac{1}{4}p + \sqrt{\frac{1}{16}p^2 - a^2}$$

und $$y = \frac{1}{4}p - \sqrt{\frac{1}{16}p^2 - a^2}.$$

Determination. Da die Werthe von x und y absolute Zahlen und also jedenfalls reell sein müssen, so muß der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen positiv oder Null, also jedenfalls

$$a^2 \leqq \frac{1}{16}p^2, \text{ d. h. } a \leqq \frac{1}{4}p$$

sein. Der größte Werth, welchen hiernach a haben darf, wenn ein Rechteck von dem vorgeschriebenen Umfang möglich sein soll, ist also $\frac{1}{4}p$. Für diesen Werth ($a = \frac{1}{4}p$) wird $x = \frac{1}{4}p = y$, und das gesuchte Rechteck ist folglich in diesem Falle ein Quadrat. Hieraus ergiebt sich, daß von allen Rechtecken mit gleichem Umfang das Quadrat den größten Inhalt hat. (Vergl. §. 230.)

Constr. Bilde ein rechtwinkliges $\triangle$ CDE (Fig. 113.) mit der Cathete $CD = a$ und der Hypotenuse $CE = \frac{1}{4}p$, beschreibe aus E mit CE einen Kreis, der die beiderseits verlängerte DE in F und G schneidet, so ist $FD = y$ und $DG = x$; und wenn man CD um $DH = DF$ verlängert und $HK \parallel DG$, $GK \parallel DH$ zieht, DHKG das verlangte Rechteck.

Bew. Denn nach der Construction ist $DH + DG = FG = \frac{1}{2}p$, folglich der ganze Umfang $= p$. Das Rechteck hat aber auch den verlangten Inhalt. Denn es ist bekanntlich

$$FD:DC = DC:DG,$$

d. h. $$y:a = a:x,$$

also $$xy = a^2.$$

§. 263. Aufgabe.

In einen Kreis ein Rechteck zu zeichnen, welches einen vorgeschriebenen Umfang hat.

Aufl. Bezeichnet man den Umfang des Rechtecks mit $2a$, den Radius des Kreises mit r, so hat man zur Bestimmung der Seiten x und y des Rechtecks die Gleichungen:

$$1) \quad x+y = a,$$

und weil der Durchmesser mit den Seiten des Rechtecks ein rechtwinkliges Dreieck bildet:

$$2) \quad x^2+y^2 = 4r^2.$$

Aus (1) folgt $$3) \quad x = a-y.$$

Dieß in (2) eingesetzt giebt:

$$(a-y)^2+y^2 = 4r^2$$

oder $$a^2-2ay+2y^2 = 4r^2$$

oder $$y^2-ay = 2r^2-\frac{1}{2}a^2,$$

woraus weiter folgt:

$$y = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{2r^2-\frac{1}{4}a^2},$$

und vermöge der Gleichung (3)

$$x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{2r^2-\frac{1}{4}a^2}.$$

Auch dießmal lassen sich die Werthe von x und y vertauschen, und die Aufgabe hat also nur eine Auflösung. Ist daher x die größere, y die kleinere Seite, so hat man:

$$x = \frac{1}{2}a + \sqrt{2r^2-\frac{1}{4}a^2}$$

und $$y = \frac{1}{2}a - \sqrt{2r^2-\frac{1}{4}a^2}.$$

Determination. Soll die Aufgabe möglich sein, so müssen vor allen Dingen x und y reell sein, d. h. es muß

$$1) \quad \frac{1}{4}a^2 \leqq 2r^2 \text{ oder } \frac{1}{2}a \leqq r\sqrt{2}$$

sein. Nimmt man grade $\frac{1}{2}a = r\sqrt{2}$ an, so wird auch $x = \frac{1}{2}a = y$, und das zu zeichnende Rechteck ist also ein Quadrat. **Demnach hat unter allen in denselben Kreis zu zeichnenden Rechtecken das Quadrat den größten Umfang.** — Es reicht aber nicht aus, daß x und y reell sind; sie müssen auch beide > 0 und $< 2r$ sein. Das Erste versteht sich für x von selbst, für y ist in dieser Hinsicht erforderlich, daß

$$\frac{1}{2}a > \sqrt{2r^2 - \frac{1}{4}a^2},$$

oder $$\frac{1}{4}a^2 > 2r^2 - \frac{1}{4}a^2,$$

also $$\frac{1}{2}a^2 > 2r^2$$

oder $$2) \quad a > 2r$$

ist, was auch anderweitig leicht erhellt. Ferner sollen x und y $< 2r$ sein. Gilt dieß von x, so wird es um so mehr auch für y gelten, und jenes ist der Fall, wenn man hat:

$$2r > \frac{1}{2}a + \sqrt{2r^2 - \frac{1}{4}a^2}$$

oder $$2r - \frac{1}{2}a > \sqrt{2r^2 - \frac{1}{4}a^2},$$

folglich da nach (1) $\frac{1}{2}a$ höchstens $= r\sqrt{2}$, also jedenfalls $\frac{1}{2}a < 2r$ ist:

$$4r^2 - 2ar + \frac{1}{4}a^2 > 2r^2 - \frac{1}{4}a^2$$

oder $$2r^2 - 2ar + \frac{1}{2}a^2 > 0,$$

also auch $$r^2 - ar + \frac{1}{4}a^2 > 0,$$

d. h. $$(r - \frac{1}{2}a)^2 > 0,$$

was jedenfalls statt findet, wie auch immer a und r angenommen sein mögen, so lange nur nicht grade $r = \frac{1}{2}a$ ist. Demnach hängt die Möglichkeit der Aufgabe von den zwei Bedingungen ab:

$$1) \quad \frac{1}{2}a \leqq r\sqrt{2} \text{ und } 2) \quad \frac{1}{2}a > r.$$

Constr. Um einen der beiden obigen Ausdrücke z. B. x zu construiren, hat man zunächst eine Linie u aus der Gleichung $u^2 = 2r^2 = r^2 + r^2$ und dann $v = \sqrt{u^2 - \frac{1}{4}a^2}$ zu suchen. Hierzu gelangt man so: Zeichne zwei sich senkrecht schneidende Radien AC und BC (Fig. 114.), ziehe AB $(= \sqrt{2r^2})$, beschreibe um AB einen Halbkreis, lege in diesen $\frac{1}{2}a = AD$ als Sehne ein und ziehe DB $\left(= \sqrt{u^2 - \frac{1}{4}a^2} = \sqrt{2r^2 - \frac{1}{4}a^2}\right)$. Verlängert man nun AD bis zur Peripherie des gegebenen Kreises, so ist die Verlängerung DE = DB, — (denn wenn man BE zieht, so ist $\angle BED = 45^0$, weil er als Peripheriewinkel auf dem Quadranten AB steht; da nun $\angle BDE = 90^0$ ist, so ist auch $\angle DBE = 45^0$, daher DE = DB). — Demnach ist AE = x, und wenn man noch EF, FG ∥ AE und AG zieht, so ist AEFG das verlangte Rechteck.

Bew. Um zu zeigen, daß dieses Rechteck den vorgeschriebenen Umfang 2a hat, beschreibe aus B mit AB einen Kreis, der die verlängerte AE in H schneidet. Dann ist $\angle EHF = 45^0$, weil der zugehörige Bogen $AF = 90^0 (= \angle ABF)$ ist; folglich ist EF = EH und AE + EF = AH; nun ist aber die Sehne AH durch das Loth BD halbirt, also DH = AD = $\frac{1}{2}$a und AH = a, daher auch AE + EF = a, folglich der ganze Umfang = 2a.

§. 264. Aufgabe.

In ein Dreieck ein Quadrat so zu zeichnen, daß zwei Ecken des Quadrats in die Grundlinie, die beiden andern in die Seiten des Dreiecks fallen.

Aufl. Denkt man sich das Quadrat bereits in das Dreieck gezeichnet (Fig. 115.), nennt die Seite des Quadrats x, die Höhe des Dreiecks h, die Grundlinie g, so hat man zur Bestimmung von x die Gleichung:

$$DE : BC = AK : AH$$

oder

$$x : g = h - x : h.$$

Hieraus folgt: $hx = gh - gx$,

also $x = \frac{gh}{g+h}$.

Constr. Um x als vierte Proportionale zu $g+h$, g und h zu erhalten, verlängere $AH = h$ um $HL = g$, mache auch noch $ML \parallel$ u. $= BH$, $LN \parallel$ u. $= HC$, ziehe BM und CN, so ist $FG = x$, indem sich verhält:

$$FG : MN = AH : AL$$

oder $$FG : g = h : h+g.$$

Zieht man nun noch DF und $EG \parallel AH$ und DE, so ist DEGF das gesuchte Quadrat.

Bew. Nach der voranstehenden Construction ist noch zu erweisen, daß $DF = FG = GE$ ist. Aus den Proportionen

$$DF : BM = AF : AM = AH : AL$$

und $$FG : MN = AH : AL$$

folgt $$DF : BM = FG : MN$$

und hieraus, da $BM = g = MN$ (nach der Constr.) ist:

$$DF = FG.$$

Ebenso wird $EG = FG$ erwiesen.

§. 265. Aufgabe.

In ein Dreieck ein Rechteck so zu zeichnen, daß zwei Ecken in die Grundlinie, die beiden andern in die Seiten des Dreiecks fallen, und das Rechteck einem gegebenen Rechteck gleich wird.

Aufl. Die Höhe des Dreiecks sei h, die Grundlinie g; man verwandle — was für das Folgende Bequemlichkeit gewährt — nach §. 258 das gegebene Rechteck in ein solches, das mit dem Dreieck einerlei Grundlinie g hat, und nenne die Höhe dieses Rechtecks c, so findet man, wenn man sich das gesuchte Rechteck bereits in das Dreieck gezeichnet denkt (Fig. 116.) und seine Seiten mit x und y bezeichnet, die Bestimmungsgleichungen:

$$LM : BC = AG : AK$$

oder 1) $$y : g = h - x : h.$$

2) $$xy = cg.$$

Aus (1) ist $hy = gh - gx$, also $y = \frac{gh - gx}{h}$.

Durch Substitution dieſes Werthes von y verwandelt ſich (2) in $\frac{ghx-gx^2}{h} = cg$

oder $ghx-gx^2 = cgh$

oder $x^2-hx = -ch.$

Hieraus folgt $x = \frac{1}{2}h \pm \sqrt{\frac{1}{4}h^2-ch}$

$= \frac{1}{2}h \pm \sqrt{h\left(\frac{1}{4}h-c\right)}$

und $y = \frac{g(h-x)}{h} = \frac{g}{h}\left[\frac{1}{2}h \mp \sqrt{h\left(\frac{1}{4}h-c\right)}\right].$

Man erhält hiernach für y und x zwei Paar verſchiedener Werthe, und die Aufgabe läßt folglich eine doppelte Auflöſung zu.

Determination. Soll die Aufgabe zu löſen ſein, ſo muß

$$c \leqq \frac{1}{4}h$$

ſein. Nimmt man $c = \frac{1}{4}h$ an, ſo fallen die beiden Werthe von x zuſammen in $x = \frac{1}{2}h$ und die beiden Werthe von y desgleichen in $y = \frac{1}{2}g$. Dieſes größte Rechteck, welches halb ſo groß iſt, als das Dreieck, wird erhalten, wenn man die beiden Seiten des Dreiecks halbirt, die Halbirungspunkte verbindet und durch dieſelben Parallelen mit der Höhe zieht. Iſt aber $c < \frac{1}{4}h$, ſo bekommen x und y doppelte reelle und poſitive Werthe, die beziehlich kleiner ſind, als h und g, und die Aufgabe läßt alſo dann jedenfalls zwei verſchiedene Auflöſungen zu.

Conſtr. Die beiden Werthe von x laſſen ſich ſo umformen:

$$x = \frac{1}{2}h \pm \sqrt{\frac{1}{2}h\left(\frac{1}{2}h-2c\right)}.$$

Um dieſen Ausdruck zu conſtruiren, hat man zunächſt die mittlere Proportionale zwiſchen $\frac{1}{2}h$ und $\frac{1}{2}h-c$ zu ſuchen. Zu dieſer gelangt man ſo: Halbire $AK = h$ in D, beſchreibe über AD einen Halbkreis, mache $AE = 2c$, errichte in E das Loth EF und ziehe $DF\left[= \sqrt{\frac{1}{2}h\left(\frac{1}{2}h-2c\right)}\right]$. Beſchreibe dann

weiter, um x zu erhalten, aus D mit DF einen Kreis, der AK in G und H schneidet, so ist der größere Werth von x durch KG, der kleinere durch KH dargestellt, wonach sich die fernere Construction der gesuchten Rechtecke LMON und PQSR von selbst ergiebt.

Bew. Das Verhältniß des Rechtecks LMON zu dem gegebenen Rechteck wird ausgedrückt durch

$$\frac{GK.LM}{c.g};$$

für diesen Ausdruck kann man, da $LM:g = AG:h$ ist, auch

$$\frac{GK.AG}{c.h}$$

setzen, oder da $AD = DK$, $DG = DH$, also auch $AG = HK$ und $AH = GK$ ist:

$$\frac{AH.AG}{c.h}.$$

Zieht man AF, so ist $\angle AFD = 90°$, folglich berührt AF den Kreis GFH, und es verhält sich nach §. 143, 3.

$$AG:AF = AF:AH,$$

woraus $AG.AH = AF^2$ hervorgeht. Weiter ist aber auch im rechtw. $\triangle AFD$

$$AF^2 = AD.AE.$$

Demnach verwandelt sich das obige Verhältniß in

$$\frac{AD.AE}{c.h} = \frac{\frac{x}{2}h.2c}{c.h} = \frac{c.h}{c.h},$$

d. h. das Rechteck LMON ist dem gegebenen Rechteck gleich.

Ebenso ist Rechteck

$$\frac{PQSR}{c.g} = \frac{HK.PQ}{c.g} = \frac{HK.AH}{c.h} = \frac{AG.AH}{c.h},$$

woraus, wie man so eben gesehen hat, Rechteck $PQSR = c.g$ folgt.

§. 266. Zusatz.

1) Von der vorhergehenden Aufgabe ist die folgende nicht wesentlich verschieden: In ein Dreieck ABC (Fig. 117.) ein Parallelogramm BDEF so zu zeichnen, daß zwei Seiten desselben BD und BF in zwei Seiten des Dreiecks AB und BC

fallen, und die gegenüberstehende Ecke E in die dritte Seite AC fällt. — Man wird nehmlich den gegebenen Inhalt zunächst durch ein Parallelogramm GC ausdrücken, welches den Winkel B und eine Seite BC mit dem Dreieck gemeinschaftlich hat. Setzt man dann der Kürze wegen AB = h, BC = g, BG = c, BD = x, BF = y, so hat man zur Bestimmung von x und y die Gleichungen:

1) $y : g = h - x : h$

und

2) $x . y = c . g$,

indem bei gleichen Parallelogrammen mit einem gemeinschaftlichen Winkel die Producte der einschließenden Seiten nach §. 165 gleich sind. Da diese Gleichungen mit denen des vorherg. §. identisch sind, so ist auch der weitere Gang der Auflösung im Wesentlichen derselbe.

2) Auch folgende Aufgabe läßt sich auf die vorhergehende zurückführen: Zwischen den Schenkeln eines Winkels BAC (Fig. 118.) ist ein Punkt D gegeben; es soll durch diesen Punkt eine Linie BC so gezogen werden, daß das von der Winkelfläche abgeschnittene Dreieck ABC einen vorgeschriebenen Inhalt hat. —

Zieht man nehmlich durch D DE || AC, DF || AB und drückt den gegebenen Inhalt durch das Dreieck GAF mit dem Winkel A und der Seite AF aus (§. 188), so kann man den Punkt B und also auch die Linie BDC dadurch finden, daß man nach dem vorherg. §. in das gegebene Dreieck GAF ein Parallelogramm BAKH zeichnet, welches mit EAFD gleichen Inhalt hat. Es läßt sich nehmlich zeigen, daß wenn das Parallelogramm AH = AD ist, auch $\triangle$ BAC = GAF sein muß. Denn aus der Gleichheit der Parallelogramme AH und AD folgt

1) $AB . AK = AE . AF$

oder

2) $AB : AF = AE : AK$.

Da hiernach EK || BF ist, so verhält sich auch

3) $AB : AF = EB : KF$.

Weiter ist

4) $AG : AF = KH : KF$ (wegen KH || AG),

oder

5) $AG . KF = AF . KH = AF . AB$

und

6) $AC : AB = ED : EB$ (wegen ED || AC),

oder

7) $AC . EB = AB . ED = AB . AF$.

Aus (5) und (7) ergiebt ſich:

8) $AG.KF = AC.EB$

oder 9) $AG:AC = EB:KF$,

folglich auch vermöge (3)

10) $AG:AC = AB:AF$

oder 11) $AG.AF = AC.AB$,

alſo 12) $\triangle AFG = ABC$.

§. 267. Zuſatz.

Ein Quadrat in ein gleichſeitiges Dreieck zu verwandeln.

Aufl. Die Seite des gegebenen Quadrats ABCD (Fig. 119.) ſei a, die Seite des geſuchten Dreiecks KFH ſei x, die Höhe y, ſo iſt

1) $\frac{1}{2}xy = a^2$

und im rechtwinkligen Dreieck FBH

2) $y^2 + \frac{1}{4}x^2 = x^2$ oder $y^2 = \frac{3}{4}x^2$.

Aus (1) folgt 3) $x = \frac{2a^2}{y}$;

dieß in (2) eingeſetzt, giebt:

$$y^2 = \frac{3a^4}{y^2} \text{ oder } y^4 = 3a^4,$$

alſo $y = a\sqrt[4]{3}$

und aus (3) $x = \frac{2a}{\sqrt[4]{3}}$

oder wenn man im Zähler und Nenner mit $\sqrt[4]{27}$ multiplicirt,

$$x = \frac{2}{3}a\sqrt[4]{27}.$$

Conſtr. Zur Zeichnung iſt der Werth von y am bequemſten; aus der obigen Gleichung

$$y^4 = 3a^4 = 3a^2.a^2$$

hat man nehmlich $y^2 = a\sqrt{3a^2}$.

Hiernach iſt zuerſt eine Linie v aus der Gleichung $v^2 = 3a^2$ und dann y aus der Gleichung $y^2 = a.v$ zu ſuchen; ergiebt ſich folgendes Verfahren:

Beſchreibe aus C mit $2BC = 2a$ einen Kreis, der die verlängerte AB in E ſchneidet, (ſo iſt $BE = \sqrt{3a^2} = v$), mache $BG = BE$ und beſchreibe über GC einen Halbkreis, der AE in F ſchneidet, (ſo iſt $BF = \sqrt{a.v} = y$); ziehe $FH \parallel EC$, mache $BK = BH$ und ziehe FK, ſo iſt KFH das verlangte gleichſeitige Dreieck.

Bew. Daß daſſelbe gleichſeitig iſt, erhellt leicht aus der Conſtruction; denn da $FH \parallel EC$ und $BC = \frac{1}{2}EC$ gemacht iſt, ſo iſt auch $BH = \frac{1}{2}FH$, alſo $KH = FH = FK$. Das Dreieck hat aber auch mit dem Quadrat gleichen Inhalt. Es iſt nehmlich nach §. 166

1) $\triangle FBH : EBC = BF^2 : BE^2 = BF^2 : BG^2$,

oder da $BG : BF = BF : BC$, alſo

auch $BG^2 : BF^2 = BF^2 : BC^2$ iſt:

2) $\triangle FBH : EBC = BC^2 : BF^2$.

Nun iſt aber $BC^2 = ABCD$, $BF^2 = BC.BG = BC.BE = 2\triangle EBC$; hiernach verwandelt ſich die Gleichung (2) in

3) $\triangle FBH : EBC = ABCD : 2EBC$,

woraus $\triangle FBH = \frac{1}{2}ABCD$,

alſo $\triangle FKH = ABCD$

hervorgeht.

Zweite Abtheilung.

Stereometrie.

Einleitung.

Von Linien in zwei sich schneidenden oder parallelen Ebenen.

§. 1. Grundsatz.

Die Lage einer Ebene ist durch drei Punkte gegeben, die nicht in grader Linie liegen, d. h. durch jede drei Punkte läßt sich allemal eine Ebene legen, und durch drei Punkte, die nicht in grader Linie liegen, kann nur eine einzige Ebene gelegt werden.

Anm. So wie sich nicht durch jede drei Punkte eine grade Linie ziehen läßt, eben so ist es nicht allemal möglich, durch vier beliebige Punkte im Raume eine Ebene zu legen.

§. 2. Zusatz.

Die Lage einer Ebene ist daher auch gegeben:

1) durch eine Linie und einen Punkt außerhalb derselben;

2) durch zwei sich schneidende Linien;

3) durch zwei parallele Linien, weil parallele Linien allemal als in derselben Ebene liegend gedacht werden.

Dagegen läßt sich nicht durch jede zwei willkürlich im Raume angenommenen Linien eine Ebene legen.

§. 3. Zusatz.

1) Durch eine Linie allein lassen sich unzählige Ebenen legen, und umgekehrt,

2) wenn zwei Ebenen drei oder mehr Punkte gemeinschaftlich haben, so müssen diese Punkte alle in einer (graden) Linie*) liegen. — Denn im entgegengesetzten Falle müßten beide Ebenen (nach §. 1) in eine zusammenfallen.

§. 4. Zusatz.

1) In einem Punkte, welcher in einer Linie gegeben ist, lassen sich auf derselben unzählige Lothe aufrichten.

2) Aus einem Punkte, der außerhalb einer Linie liegt, läßt sich auf dieselbe nur ein Loth fällen.

3) Durch einen Punkt außerhalb einer Linie kann mit derselben nur eine Parallele gezogen werden.

Bew. 1) Durch eine Linie und einen Punkt in ihr lassen sich unzählige Ebenen legen, und in jeder läßt sich auf der Linie in dem gegebenen Punkte ein Loth aufrichten.

Dagegen kann durch die Linie und den Punkt außerhalb derselben nur eine Ebene gelegt werden, und für eine Ebene sind die Behauptungen (2) und (3) in der Planimetrie (§. 33 u. 26) als richtig dargethan.

§. 5. Erklärung.

Zwei Ebenen können denkbarer Weise eine dreifache Lage gegen einander haben: entweder sie fallen zusammen, oder sie schneiden sich — und ihr Durchschnitt ist nach §. 3, 2. eine grade Linie — oder sie treffen in keinem Punkte zusammen und werden dann *parallel* genannt.

Statt des Wortes Durchschnittslinie sagt man auch kürzer: *Kante*.

---

*) Wenn im Folgenden das Wort „*Linie*" ohne Beiwort gebraucht wird, so ist in der Regel darunter die grade Linie zu verstehen.

§. 6. Erklärung.

Eben so kann eine (unbegrenzte) Linie in dreifacher Lage gegen eine Ebene gedacht werden: entweder sie liegt ganz in der Ebene, oder sie schneidet dieselbe in einem Punkte, oder sie hat mit der Ebene keinen Punkt gemeinschaftlich und heißt dann der Ebene parallel.

Anm. Daß eine Linie, welche mit einer Ebene zwei Punkte gemeinschaftlich hat, ganz in die Ebene fällt, geht aus dem in der Planimetrie (§. 2) aufgestellten Begriff der Ebene hervor.

§. 7. Lehrsatz.

1) Wenn zwei Ebenen sich schneiden, und man zieht in der einen eine Linie, welche die Kante schneidet, so schneidet sie auch die andere Ebene, und

2) wenn eine Linie, in der einen von zwei sich schneidenden Ebenen gezogen, die andre Ebene schneidet, so muß sie auch die Kante schneiden.

Bew. Schneidet die Linie CD (Fig. 1.) in der Ebene GAB die Kante AB in dem Punkte C, so trifft sie in diesem Punkte auch die Ebene ABH, weil die Kante in beiden Ebenen, also auch in der Ebene ABH liegt.

2) Wird in der Ebene ABG eine Linie CD bis zum Einschnitt in die Ebene ABH gezogen, so gehört der Einschnittspunkt C beiden Ebenen an und liegt daher jedenfalls in der Kante AB, weil diese alle Punkte enthält, welche beiden Ebenen gemeinschaftlich sind.

§. 8. Zusatz.

Hieraus folgt durch einfache Umkehrung:

1) Wenn zwei Ebenen sich schneiden, und eine Linie in der einen mit der Kante parallel ist, so ist sie auch mit der andern Ebene parallel, und

2) wenn eine Linie, in der einen Ebene gezogen, mit der andern Ebene parallel ist, so muß sie auch der Kante parallel sein.

Bew. 1) Wenn die Linie EF in der Ebene ABG (Fig. 1.) mit der Kante AB parallel gegeben ist, so kann sie die Ebene

ABH nicht ſcheiden, weil ſie ſonſt nach (2) des vorherg. §. auch die Kante AB ſchneiden würde, mit der ſie doch parallel vorausgeſetzt iſt.

2) Wenn die Linie EF in der Ebene ABG der Ebene ABH parallel gegeben iſt, ſo kann ſie die Kante AB nicht ſchneiden, weil ſie ſonſt nach (1) im vorherg. §. auch die zweite Ebene ABH treffen würde, welches der Vorausſetzung widerſpricht.

§. 9. Lehrſatz.

Eine Linie iſt einer Ebene parallel, wenn ſie einer in derſelben gezogenen Linie parallel iſt.

Iſt nehmlich AB ∥ CD (Fig. 2.), ſo iſt auch AB ∥ MN.

Bew. Lege durch die beiden Parallelen AB und CD eine Ebene, welche die Ebene MN in der Linie CD durchſchneidet; da nun in der einen dieſer beiden ſich ſchneidenden Ebenen eine Linie AB mit der Kante CD nach der Vorausſetzung parallel iſt, ſo muß dieſe Linie AB nach (1) im vorherg. §. auch mit der andern Ebene MN parallel ſein.

Anm. Auch folgende (minder wichtige) Sätze laſſen ſich leicht erweiſen:

1) Durch einen Punkt außerhalb einer Ebene laſſen ſich mit derſelben unzählige parallele Linien ziehen.

2) Schneiden ſich zwei Ebenen, ſo läßt ſich in der einen durch einen gegebenen Punkt mit der andern nur eine einzige parallele Linie ziehen.

3) Sind zwei Ebenen parallel, — (wenn dergleichen möglich ſind), — ſo iſt jede Linie in der einen der andern Ebene parallel.

4) Sind zwei Linien parallel, ſo iſt jede durch die eine gelegte Ebene, — (welche nicht zugleich durch die andere geht), — der andern Linie parallel.

5) Iſt eine Linie einer Ebene parallel, ſo läßt ſich in der Ebene durch jeden beliebigen Punkt eine Linie ziehen, welche der gegebenen Linie parallel läuft.

6) Iſt eine Linie zweien ſich ſchneidenden Ebenen parallel, ſo iſt ſie auch der Kante parallel, (wie leicht indirect aus (5) folgt).

7) Wenn zwei Linien nicht in derſelben Ebene liegen, ſo läßt ſich allemal durch die eine Linie eine und auch nur eine einzige Ebene legen, welche der andern parallel iſt. *)

*) Das Aufſuchen der Beweiſe für dieſe Sätze wird dem Anfänger eine ſehr nützliche Uebung gewähren.

§. 10. Lehrſatz.

1) Wenn zwei Ebenen ſich ſchneiden und von einer dritten Ebene, welche nicht durch die Kante geht,*) durchſchnitten werden, ſo ſind überhaupt nur zwei Fälle möglich, entweder die dritte Ebene ſchneidet die Kante, oder ſie iſt derſelben parallel. Im erſten Fall treffen die beiden Linien, in welchen die dritte Ebene die beiden gegebenen Ebenen durchſchneidet, mit der Kante in demſelben Punkte zuſammen; im andern Fall ſind dieſe Linien mit der Kante und unter ſich parallel.

Bew. 1) Die beiden gegebenen Ebenen ſeien ABM und ABN (Fig. 3.), und eine dritte Ebene DCE ſchneide die Kante in C. Da dieſer Punkt ſowohl der Ebene DCE, als auch der Ebene ABM angehört, ſo muß er in der Durchſchnittslinie dieſer beiden Ebenen liegen; eben ſo muß er auch in der Durchſchnittslinie der Ebenen DCE und ABN liegen, weil er eben ſowohl zu der einen, wie zur andern dieſer beiden Ebenen gehört. Demnach treffen die beiden Durchſchnittslinien CD und CE, in welchen die Ebene DCE die Ebenen ABM und ABN durchſchneidet, mit der Kante AB in demſelben Punkte C zuſammen.

2) Wenn die dritte Ebene mit der Kante AB (Fig. 4.) parallel iſt, ſo muß AB zunächſt mit der Durchſchnittslinie CD parallel ſein; denn wenn zwei Ebenen ABM und CDFE ſich ſchneiden, und eine Linie AB, in der einen Ebene ABM gezogen, der andern Ebene CDEF parallel iſt, ſo iſt ſie auch (nach §. 8, 2.) der Durchſchnittslinie CD parallel. Aus demſelben Grunde iſt auch AB der Durchſchnittslinie EF parallel. Endlich ſind auch CD und EF parallel; denn CD iſt zunächſt (nach §. 9) der Ebene ABEF parallel, weil ſie der in derſelben gezogenen Linie AB parallel erwieſen iſt, und daher iſt ſie auch wieder (nach §. 8, 2.) der Linie EF parallel, in welcher die Ebene ABN von der Ebene CDEF durchſchnitten wird.

*) Eine Ebene geht durch eine Linie, wenn die Linie ganz in der Ebene liegt.

§. 11. Zusatz.

Aus dem vorherg. §. gehen unmittelbar folgende äußerst merkwürdige Sätze hervor:

1) Wenn sich drei Ebenen in drei Linien schneiden, so sind überhaupt nur zwei Fälle möglich: entweder die drei Kanten sind einander parallel, oder sie vereinigen sich sämmtlich in dem nehmlichen Punkte.

2) Wenn daher von den drei Kanten, in denen sich drei Ebenen schneiden, irgend zwei parallel sind, so sind sie alle drei parallel.

§. 12. Lehrsatz.

1) Wenn zwei Ebenen sich schneiden, und man zieht in jeder eine Linie mit der andern Ebene parallel, so liegen diese beiden Linien ebenfalls in einer Ebene und sind parallel.

2) Sind daher überhaupt zwei Linien einer dritten parallel, so sind sie sich selbst parallel.

Bew. Es sei in Fig. 5. CD || AB und EF || AB; angenommen CD und EF lägen nicht in einer Ebene, so läßt sich doch jedenfalls durch die eine CD und einen beliebigen Punkt E in der andern eine Ebene legen, welche nach der so eben aufgestellten Annahme die Ebene ABEF nicht in EF, sondern in irgend einer andern Linie EG schneiden soll. Wenn sich nun aber drei Ebenen ABM, ABN und CDEG in drei Kanten AB, CD, EG schneiden, und zwei von diesen, AB und CD, (nach der Voraussetzung) parallel sind, so sind sie (nach (2) des vorherg. §.) alle drei parallel; also müßte auch EG || AB sein, was doch, da EF || AB gegeben ist, (nach §. 4, 3.) nicht stattfinden kann. Demnach kann die durch CD und E gelegte Ebene die Ebene ABN nicht in EG, sondern nur in EF durchschneiden. Also liegen CD und EF in einer Ebene, und sie sind (nach (2) des vorherg. §.) parallel, weil von den drei Kanten AB, CD, EF zwei AB und CD (oder AB und EF) als parallel vorausgesetzt sind.

2) Liegen die drei Linien sämmtlich in einer Ebene, so ist der Satz bereits in der Planimetrie (§. 26) erwiesen; liegen sie dagegen in verschiedenen Ebenen, so läßt sich doch durch je zwei, die als parallel gegeben sind (AB und CD und AB und EF in Fig. 5.), eine Ebene legen, und dann ist der Satz eine unmittelbare Folge des so eben in (1) Erwiesenen.

§. 13. Zusatz.

1) Eine Ebene, welche die eine von zwei parallelen Linien schneidet, schneidet auch die andere, und

2) wenn von zwei parallelen Linien die eine mit einer Ebene parallel ist, so ist die andere mit dieser Ebene ebenfalls parallel.

Bew. 1) Es sei AB ‖ CD (Fig. 6.) und AB werde von der Ebene MN in B geschnitten; — lege durch die Parallelen AB und CD eine Ebene, welche die Ebene MN in irgend einer Linie EB durchschneiden wird. Da diese Linie in der Ebene der beiden Parallelen liegt, und von der einen AB durchschnitten wird, so muß nach der Planimetrie (§. 26) auch die andere CD die Linie EB in irgend einem Punkte E schneiden; in diesem Punkte trifft die Linie CD aber dann offenbar auch mit der Ebene MN zusammen, w. z. e. w.

2) Es sei CD ‖ AB (Fig. 7.) und AB ‖ MN; — lege durch AB und einen beliebigen Punkt E in MN eine Ebene, welche MN in EF durchschneidet. Da AB ‖ MN vorausgesetzt ist, so ist sie (nach §. 8, 2.) auch der Kante EF parallel, und weil CD ‖ AB gegeben ist, so ist (nach (2) des vorherg. §.) auch CD ‖ EF und folglich auch (nach §. 9) CD ‖ MN, weil CD einer in der Ebene MN liegenden Linie EF parallel bewiesen ist.

Anm. 1. Von den beiden vorstehenden Behauptungen ist mit der einen als unmittelbare Folge auch die andere gegeben, und man hätte sich daher auf den Beweis der einen beschränken können.

In (2) konnte die zweite Parallele CD auch mit der Ebene MN zusammenfallen. Dergleichen besondere Fälle, die sich von selbst verstehen und nicht die mindeste Schwierigkeit darbieten, werden im Folgenden nicht allemal besonders herausgehoben werden.

Anm. 2. Folgende Sätze sind falsch: (warum?)

1) Eine Linie, welche die eine von zwei parallelen Linien schneidet, schneidet nothwendig auch die andere.

2) Zwei Linien, welche einer Ebene parallel sind, müssen auch unter sich parallel sein.

3) Wenn eine Linie und eine Ebene parallel sind, so schneidet jede Ebene, welche die gegebene Ebene schneidet, auch die ihr parallele Linie.

Richtig sind dagegen folgende Behauptungen:

1) Wenn eine Linie einer Ebene parallel ist, so schneidet jede Ebene, welche die Linie schneidet, auch die gegebene Ebene.

2) Wenn von zwei Linien jede zweien sich schneidenden Ebenen parallel ist, so sind die Linien auch unter sich parallel.

§. 14. Lehrsatz.

1) Wenn zwei Ebenen sich schneiden, so ist es nicht möglich, daß zwei sich schneidende Linien in der einen, zweien sich schneidenden Linien in der andern parallel sind.

2) Zwei Ebenen sind daher gewiß parallel, wenn zwei sich schneidende Linien in der einen, zweien sich schneidenden Linien in der andern parallel sind.

Bew. Ist CD || EF (Fig. 8.), so schneiden sich die gegebenen Ebenen ABM und ABN und die durch die beiden Parallelen gelegte Ebene CDEF in den drei Kanten AB, CD, EF, und da von diesen zwei, CD und EF parallel vorausgesetzt sind, so sind sie (nach §. 11, 2.) alle drei parallel, also auch CD || AB; wäre nun auch noch CG || EH, so müßte aus den nehmlichen Gründen auch CG || AB sein, welches doch nicht möglich ist, da so eben CD || AB erwiesen ist.

(2) Ist daher AB || DE und AC || DF (Fig. 9.), so können sich die Ebenen MN und PQ nicht schneiden und sind folglich parallel.

§. 15. Lehrsatz.

Wenn zwei parallele Ebenen von einer dritten durchschnitten werden, so sind die Durchschnittslinien parallel.

Bew. Denn die Durchschnittslinien (AB und DE in Fig. 9.) liegen nach der Voraussetzung in derselben Ebene (ABDE) und

können sich nicht schneiden, weil die Ebenen (MN und PQ), in denen sie liegen, parallel vorausgesetzt sind und folglich nirgends zusammentreffen können.

Anm. Um der wissenschaftlichen Strenge nichts zu vergeben, ist §. 14 dem §. 15 vorausgeschickt; da indeß die Vorstellung der parallelen Ebenen recht füglich als eine einfache, unmittelbar gegebene angesehen werden kann, so wird wenigstens beim mündlichen, zumal heuristischen Vortrage jedenfalls die umgekehrte Anordnung den Vorzug verdienen.

§. 16. Lehrsatz.

Durch einen Punkt außerhalb einer Ebene läßt sich mit derselben 1) allemal eine und 2) auch nur eine einzige parallele Ebene legen.

Bew. 1) Um durch A (Fig. 9.) eine der Ebene PQ parallele Ebene zu legen, wähle in PQ irgend einen Punkt D, ziehe durch diesen in PQ zwei beliebige Linien DE und DF, lege durch A und DE und durch A und DF Ebenen, ziehe in denselben AB || DE und AC || DF, und lege durch BAC eine Ebene MN, so ist diese (nach §. 14, 2.) mit MN parallel.

2) Angenommen es ließen sich durch den Punkt A (Fig. 10.) zwei Ebenen PQ und PR beide mit MN parallel legen; — wähle in MN einen beliebigen Punkt B und in einer der beiden sich schneidenden Ebenen irgend einen Punkt C, der jedoch außerhalb der Kante PA liegen soll; lege durch C, A u. B eine Ebene, welche die gegebenen Ebenen in den Linien AD, AE und BF durchschneidet. Dann müßten AD und AE nach dem vorherg. §. beide mit BF parallel sein, was offenbar unmöglich ist.

§. 17. Zusatz.

1) Eine Ebene, welche die eine von zwei parallelen Ebenen schneidet, schneidet auch die andere, und

2) eine Ebene, welche mit der einen von zwei parallelen Ebenen parallel ist, ist auch der andern parallel.

3) Eine Linie, welche die eine von zwei parallelen Ebenen schneidet, schneidet auch die andere, und

4) eine Linie, welche mit der einen von zwei parallelen Ebenen parallel ist, ist auch der andern parallel.

Bew. (1) und (2) sind unmittelbare Folgen von (2) des vorherg. §.

3) Lege durch AB (Fig. 11.) eine willkührliche Ebene, welche MN in CD und die ihr parallele Ebene PQ vermöge (1) in EF schneidet. Da nun AB die CD schneidet, und nach §. 15 CD || EF ist, so muß nach der Planimetrie (§. 26) AB, da sie in der Ebene der beiden parallelen Linien liegt, auch EF und also auch die Ebene PQ schneiden.

4) Lege durch die gegebene Linie AB (Fig. 12) und irgend einen Punkt C in einer der beiden parallelen Ebenen eine Ebene, welche die Ebene MN in CD und vermöge (1) auch PQ in EF schneidet. Ist nun AB || MN gegeben, so ist (nach §. 8, 2.) AB auch der Kante CD parallel; nach §. 15 ist CD || EF, also ist auch AB || EF und folglich auch (nach §. 9) AB || PQ.

§. 18. Zusatz.

1) Parallele Linien zwischen parallelen Ebenen sind gleich, und umgekehrt.

2) Zwei Ebenen sind parallel, wenn sie von drei parallelen Linien, die nicht in einer Ebene liegen, gleiche Stücke abschneiden.

3) Gehen von einer Ebene aus auf derselben Seite vier oder mehr parallele gleiche Linien, so liegen ihre Endpunkte sämmtlich in einer Ebene, die nach (2) mit der gegebenen Ebene parallel ist.

Bew. 1) Es sei MN || PQ (Fig. 13.) und AC || BD; lege durch AB und CD eine Ebene, welche die gegebenen Ebenen in den (nach §. 15) parallelen Linien AC und BD schneidet. Dann ist ABDC ein Parallelogramm und daher (nach §. 69 der Plan.) AB = CD.

2) Es seien AB, CD und EF (Fig. 14.) parallel und gleich; — lege durch zwei Paar derselben Ebenen, welche die gegebenen Ebenen in AE, AC, BF und BD schneiden. Da AB || u. = CD und AB || u. = EF vorausgesetzt ist, so sind

die entſtandenen Vierecke ABDC und ABFE (nach §. 72 der Plan.) Parallelogramme und daher AC || BD und AE || BF. Da hiernach zwei ſich ſchneidende Linien in der Ebene MN zweien ſich ſchneidenden Linien in PQ parallel laufen, ſo ſind (nach §. 14, 2.) dieſe Ebenen ſelbſt parallel.

3) Es ſeien die vier parallelen und gleichen Linien AB, CD, EF, GH (Fig. 15.) gegeben; — nun läßt ſich jedenfalls durch je drei der vier Endpunkte A, C, E, G z. B. durch A, C, E und durch A, C, G eine Ebene legen; dieſe Ebenen ſind aber nach (2) beide mit MN parallel und können folglich (nach §. 16, 2.) nicht von einander verſchieden ſein, da ſie durch denſelben Punkt A (oder C) gehen. Demnach liegen die vier Endpunkte A, C, E, G in derſelben, mit MN parallelen Ebene. — Das Nehmliche gilt eben ſo von jeder größern Zahl.

Anm. In ähnlicher Art, wie die vorherg. Sätze, laſſen ſich auch folgende erweiſen:

1) Zwei Ebenen ſind parallel, wenn zwei ſich ſchneidende Linien in der einen mit der andern Ebene parallel ſind.

2) Gehen von einem Punkte außerhalb einer Ebene mehrere mit derſelben parallele Linien, ſo liegen dieſe alle in einer Ebene, welche nach (1) der gegebenen Ebene parallel iſt.

3) Liegen zwei Linien nicht in einer Ebene, ſo läßt ſich nach (7) der Anm. zu §. 9 durch jede eine der andern parallele Ebene legen; dieſe beiden Ebenen ſind auch unter ſich parallel.

4) Wenn zwei ſich ſchneidende Ebenen zweien ſich ſchneidenden Ebenen parallel ſind, ſo ſind auch ihre Durchſchnittslinien parallel.

§. 19. Lehrſatz.

Wenn die Schenkel zweier Winkel parallel laufen und von den Scheitelpunkten aus nach derſelben Seite hin gezogen ſind, ſo ſind die beiden Winkel gleich.

Bew. Liegen die beiden Winkel in derſelben Ebene, ſo iſt der Satz ſchon in §. 34 der Plan. erwieſen; im entgegengeſetzten Falle ſei AB || DE und AC || DF (Fig. 16.); — lege durch die parallelen Linien die Ebenen BADE und CADF, welche ſich in der Kante AD durchſchneiden; ſchneide von AB und DE zwei beliebige, aber gleiche Stücke AG und DH und eben ſo von AC

und DF die gleichen Stücke AK und DL ab, und ziehe GH und KL; — dann sind die entstandenen Vierecke ADHG und ADLK (nach §. 72 der Plan.) Parallelogramme, weil AG || u. = DH und AK || u. = DL ist; daher ist auch AD || und = GH und AD || und = KL und (vermöge §. 12, 2.) also auch GH || und = KL. Demnach läßt sich durch KL und GH eine Ebene legen, welche die Ebene der gegebenen Winkel in KG und LH schneidet. Das entstandene Viereck GHLK ist ein Parallelogramm, weil GH || und = KL war; deshalb ist auch KG = LH, und da AG = DH und AK = DL gemacht ist, so stimmen die Dreiecke AGK und DHL in den drei Seiten überein, und es ist folglich auch ∠ BAC = EDF.

Anm. Auch der umgekehrte Satz ist leicht zu erweisen:

Wenn in zwei parallelen Ebenen (MN und PQ in Fig. 9.) zwei parallele Linien (AB und DE) gezogen sind, und zwei andere Linien (AC und DF) von jenen in denselben Ebenen an der nehmlichen Seite um gleiche Winkel (BAC und EDF) abweichen, so sind diese letztern Linien (AC und DF) ebenfalls parallel.

Erster Abschnitt.
Vom Flächenwinkel.

A. Vom Flächenwinkel im Allgemeinen.

§. 20. Erklärung.

Der unendliche Raum, welcher zwischen zwei Ebenen liegt, die in einer Linie zusammenstoßen, heißt ein Flächenwinkel. Die Ebenen, welche den Flächenwinkel einschließen, heißen die Schenkel, und die Linie, welche sie gemeinschaftlich haben, die Kante oder Scheitellinie des Flächenwinkels.

Ein Flächenwinkel entsteht, wenn man eine Ebene, die an einer Seite durch eine Linie begrenzt gedacht wird, um diese Linie (als Axe) dreht.

Zwei Flächenwinkel werden gleich genannt, wenn sie sich so zusammenlegen lassen, daß ihre Scheitellinie und beide Paar

Schenkel sich decken, — ungleich, wenn dieses nicht statt findet. — Größer. — Kleiner. —

Anm. Zur Bezeichnung eines Flächenwinkels sind vier Buchstaben erforderlich, zwei für die Kante und zwei für Punkte in den Schenkeln außerhalb der Kante, (nehmlich für jeden Schenkel einer). Von den letzten beiden Buchstaben wird bei der Benennung des Flächenwinkels der eine an den Anfang, der andere an das Ende gestellt, während die beiden für die Kante in die Mitte kommen; der in Fig. 17. vorgestellte Flächenwinkel kann also **ABCD** oder **ACBD** oder **DBCA** oder **DCBA** genannt werden; in jeder dieser Ausdrucksweisen geben die drei ersten Buchstaben den einen Schenkel, die drei letzten den andern an.

§. 21. Erklärung.

Ein Flächenwinkel, dessen beide Schenkel in einer Ebene liegen, heißt ein flacher, und da, wie man leicht sieht, alle flachen Flächenwinkel gleich sind, so nennt man eben so, wie in der Planimetrie, einen Flächenwinkel hohl oder erhaben, je nachdem er kleiner oder größer, als ein flacher ist.

Im Folgenden wird fast ausschließlich nur von hohlen Flächenwinkeln die Rede sein.

§. 22. Erklärung.

Zwei Flächenwinkel, welche die Kante und einen Schenkel gemeinschaftlich haben, und deren beide andere Schenkel in einer Ebene liegen, heißen Nebenflächenwinkel.

Scheitelflächenwinkel sind solche, welche die Kante gemeinschaftlich haben, und deren gegenüberstehende Schenkel in einer Ebene liegen.

§. 23. Zusatz.

1) Die Summe zweier Nebenflächenwinkel ist ein flacher.

2) Scheitelflächenwinkel sind gleich.

Der Beweis ist derselbe wie in der Planimetrie (§. 14 und 16.)

§. 24. Erklärung.

Ein Flächenwinkel, der seinem Nebenflächenwinkel gleich ist, heißt ein rechter, und zwei Ebenen stehen auf einander senkrecht, wenn sie rechte Flächenwinkel bilden.

Da alle rechten Flächenwinkel (als Hälften des Flachen), gleich sind, so kann man eben so, wie in der Planimetrie, diejenigen Flächenwinkel, welche keine rechten sind, schiefe nennen und diese dann wieder in spitze und stumpfe eintheilen.

§. 25. Zusatz.

Von rechten und schiefen Flächenwinkeln gelten aus gleichen Gründen dieselben Bestimmungen, wie von Linienwinkeln in der Planimetrie (§. 20).

§. 26. Erklärung.

Wenn zwei (parallele oder sich schneidende) Ebenen von einer dritten in zwei parallelen Linien durchschnitten werden (Fig. 18.), so kann man die entstandenen acht hohlen Flächenwinkel eben so, wie in der Planimetrie (§. 21) in gleichliegende (a u. e, b u. f, c u. g, d u. h), (innere) entgegengesetzte (c u. f, e u. d) und (innere) gegenüberstehende (c u. e, d u. f) eintheilen.

Es gelten aber offenbar auch von diesen Flächenwinkeln aus ganz gleichen Gründen dieselben Sätze, wie von den Linienwinkeln in der Planimetrie (§. 22—24).

§. 27. Lehrsatz.

Zwei Ebenen sind parallel, wenn sie von einer dritten in zwei parallelen Linien durchschnitten werden, und entweder

1) ein Paar gleichliegende oder
2) ein Paar entgegengesetzte Winkel gleich sind, oder
3) ein Paar gegenüberstehende einen Flachen betragen.

Bew. Ist (Fig. 19.) BC ‖ FG und Flächenw. ABCD = AFGH, so ist auch nach dem vorherg. §. Flächenw. EBCG = BFGH und DBCG = BFGK; demnach lassen sich die Ebenen DBC, BCFG und FGH in ungeänderter gegenseitiger Lage mit der gegenüberstehenden Verbindung von Ebenen EBCFGK so zusammenlegen, daß Ebene BCFG wieder auf FGBC, nehmlich Kante BC auf FG und FG auf BC, Ebene BCD auf FGK und Ebene FGH auf BCE fällt. Wenn sich nun die

Ebenen BCE und FGK in irgend einer Linie ſchnitten, ſo müßten ſich in der nehmlichen Linie auch die Ebenen FGH und BCD ſchneiden. Dann ſchnitten ſich aber die ganzen Ebenen EBCD und KFGH in zwei verſchiedenen Linien, welches offenbar unmöglich iſt. Demnach können ſich die Stücke EBC und KFG nicht ſchneiden; daſſelbe gilt eben ſo von DBC und HFG, und die Ebenen ED und KH ſind folglich parallel. *)

(2) und (3) ſind vermöge des vorherg. §. unmittelbare Folgerungen aus (1).

Anm. Einen andern Beweis dieſes Satzes enthält die Anm. zu §. 44.

§. 28. Lehrſatz.

Wenn zwei parallele Ebenen von einer dritten durchſchnitten werden, ſo ſind 1) die vier Paar gleichliegenden und 2) die zwei Paar (innern) entgegengeſetzten Winkel gleich, und 3) die (innern) gegenüberſtehenden Winkel machen zuſammen einen Flachen aus.

Bew. 1) Wenn die Ebene ED || KH (Fig. 20.) iſt, und es wären die gleichliegenden Flächenwinkel ABCD und AFGH ungleich, z. B. ABCD > AFGH, dann würde ſich von ABCD ein Stück ABCL = AFGH abſchneiden laſſen, und es müßte nun nach dem vorherg. §. Ebene BCL || KH ſein, welches doch (nach §. 16) nicht möglich iſt, da ED || KH gegeben iſt.

(2) und (3) ergeben ſich aus (1) durch §. 26.

Anm. Eben ſo wie in der Planimetrie (§. 31—34) laſſen ſich auch folgende Sätze erweiſen:

1) Wenn zwei ſich ſchneidende Ebenen von einer dritten in parallelen Linien durchſchnitten werden, ſo betragen die gegenüberſtehenden Winkel auf der Seite, auf welcher ſich die Ebenen ſchneiden, zuſammen weniger, auf der andern Seite mehr, als einen Flachen.

2) Wenn zwei Ebenen von einer dritten in parallelen Linien geſchnitten werden, und ein Paar innere gegenüberſtehende Winkel zuſammen weniger, als einen Flachen ausmachen, ſo ſchneiden ſich die beiden Ebenen und zwar auf der Seite, auf welcher dieſe Winkel liegen.

3) Flächenwinkel, welche parallele Schenkel haben und ſich nach derſelben Seite hin öffnen, ſind gleich.

*) Vergl. in der erſten Abth. Plan. §. 34 Anm

4) Iſt von zwei parallelen Ebenen die eine auf einer dritten ſenkrecht, ſo iſt auch die andere auf der dritten ſenkrecht.

Dagegen läßt ſich nicht allemal behaupten, daß zwei Ebenen, welche auf einer dritten ſenkrecht ſtehen, parallel ſind; dieß iſt nur dann ganz gewiß wahr, wenn die ſenkrechten Ebenen von der dritten in parallelen Linien durchſchnitten werden.

Aehnliches gilt von den Behauptungen (3)—(5) in §. 33 der Plan.

Bemerk. Im Vorhergehenden iſt hauptſächlich nur von zwei ſich ſchneidenden Ebenen oder von drei Ebenen, welche ſich in parallelen Linien durchſchneiden, die Rede geweſen. In den nächſten Sätzen werden drei ſich ſchneidende Ebenen in Betracht gezogen, deren Kanten ſich in demſelben Punkte vereinigen, und inſofern würden dieſe Sätze eigentlich in den folgenden Abſchnitt gehören. Da dieſer indeß die allen körperlichen Dreiecken zukommenden Eigenſchaften zu ſeinem Gegenſtande hat, und die nächſten Sätze nur den beſondern Fall eines Dreiecks mit zwei rechten Winkeln behandeln, ſo ſind dieſelben noch von dem folgenden Abſchnitt ausgeſchloſſen worden. *)

B. Von Ebenen und Linien, welche ſich ſenkrecht durchſchneiden.

§. 29. Lehrſatz.

Wenn zwei ſich ſchneidende Ebenen auf einer dritten ſenkrecht ſtehen, ſo iſt auch ihre gemeinſchaftliche Kante auf den Durchſchnittslinien mit der dritten Ebene ſenkrecht.

*) Der Anfänger wird die nächſten äußerſt leicht verſtändlichen und einfachen Sätze nur dann auch eben ſo raſch und leicht auffaſſen, wenn er ſich vorher hinreichende Vertrautheit mit der Vorſtellung des Flächenwinkels und Fertigkeit in der Bezeichnung und Benennung deſſelben erworben hat. Gelegenheit zur Uebung bieten unter andern die zwölf in Fig. 32. oder die achtzehn in Fig. 22. vorgeſtellten hohlen Flächenwinkel dar. Beſonders hat ſich der Anfänger mit Klarheit zu vergegenwärtigen, daß der Flächenwinkel eben ſo, wie der Linienwinkel nicht von der (in der Zeichnung dargeſtellten) Größe ſeiner Schenkel abhängt, da dieſe in beiden Fällen eigentlich unbegrenzt gedacht werden; ſo iſt z. B. in Fig. 16. der Linienwinkel **GAK** von **BAC** und eben ſo in Fig. 21. der Flächenwinkel **ABED** von **AFED** durchaus nicht verſchieden.

Sind nehmlich die Ebenen CAD und EAF (Fig. 21.) ⊥ CEDF, so ist auch AB ⊥ CD und EF.

Bew. Lege die Scheitelflächenwinkel CABE und DABF so zusammen, daß die Ebene CBE auf DBF fällt, nehmlich B wieder auf B, BC auf BD und BE auf BF. Dann fällt auch die Ebene ABC auf ABD und ABE auf ABF, weil diese Ebenen sämmtlich auf der Grundebene CEDF nach der Voraussetzung senkrecht sind. Nun muß auch die Kante AB wieder mit AB zusammenfallen, weil die Ebenen, in denen sie liegt, zusammengefallen sind. Demnach ist der Linienwinkel ABC = ABD und ABE = ABF, weil ihre Scheitel und Schenkel auf einander fielen; also ist AB ⊥ CD und EF.

Anm. Daß eine Ebene, welche zwei sich schneidende Ebenen senkrecht durchschneidet, auch die Kante schneiden muß, folgt aus §. 11 u. 27 und wird nochmals besonders in §. 38, 2. erwiesen. Da diese Rücksicht indeß dem Sinne des obigen Satzes ganz fern liegt, so hätte man denselben, um jede Zweideutigkeit zu vermeiden, auch so aussprechen können: „wenn drei Ebenen sich in drei zusammenstoßenden Kanten vereinigen, und zwei von den Ebenen auf der dritten senkrecht stehen, so u. s. w." Wegen der häufigen Anwendungen des Satzes ist die obige kürzere Fassung vorgezogen worden.

§. 30. Lehrsatz.

Ist von zwei sich schneidenden Ebenen die eine auf einer dritten und auch die gemeinschaftliche Kante auf der zugehörigen Durchschnittslinie senkrecht, so ist auch die andere Ebene auf der dritten und die gemeinschaftliche Kante auf der zugehörigen Durchschnittslinie senkrecht.

Ist nehmlich Ebene CAD ⊥ CEDF (Fig. 21.) und AB ⊥ CD, so ist auch Ebene EAF ⊥ CEDF und AB ⊥ EF.

Bew. Lege die Scheitelflächenwinkel CABE und DABF so zusammen, daß Ebene CBE auf DBF, nehmlich B wieder auf B, BC auf BD und BE auf BF fällt. Dann fällt auch Ebene ABC auf ABD, weil sie auf der Grundebene CEDF senkrecht vorausgesetzt sind, und zugleich muß in diesen Ebenen AF wieder auf AB fallen, weil nach d. Voraus. Linie ABC

ABD iſt. Nun fällt auch die Ebene ABE mit ABF zuſammen, weil zwei ſich ſchneidende Linien in der einen mit zwei ſich ſchneidenden Linien in der andern ſich deckten, AB mit AB und BE mit BF; demnach iſt der Flächenwinkel ABEC = ABFD, (weil Kante und Schenkel zuſammengefallen ſind,) oder was daſſelbe iſt, Flächenw. AFEC = AFED, alſo Ebene EAF ⊥ CEDF. Eben ſo iſt auch Linienw. ABE = ABF und daher AB ⊥ EF.

§. 31. Lehrſatz.

Wenn zwei ſich ſchneidende Ebenen von einer dritten ſo durchſchnitten werden, daß die gemeinſchaftliche Kante auf den Durchſchnittslinien ſenkrecht ſteht, ſo ſtehen auch die beiden Ebenen ſelbſt auf der dritten ſenkrecht.

Iſt nehmlich AB ⊥ CD und EF (Fig. 21.), ſo ſind auch die Ebenen CAD und EAF ⊥ CEDF.

Bew. Lege die Scheitelflächenwinkel CABE und DABF ſo zuſammen, daß ſie ſich decken, nehmlich die Kante AB liegen bleibt, Schenkel (Ebene) ABC auf ABD und ABE auf ABF fällt. Dann muß auch die Linie BC mit BD und BE mit BF zuſammenfallen, weil die Ebenen, in denen dieſe Linien liegen, zuſammengefallen ſind, und die Linien nach d. V. mit AB ſämmtlich rechte Winkel bilden. Demnach fällt auch Ebene CBE mit DBF zuſammen, (weil CB auf BD und BE auf BF gefallen iſt), und daher iſt Flächenw. ABCE = ABDF, (weil Kante und Schenkel zuſammengefallen ſind,) — oder was ganz daſſelbe iſt, Flächenw. ACDE = ACDF; — und eben ſo Flächenw. ABEC = ABFD — oder was daſſelbe iſt, AFEC = AFED; — folglich ſtehen die Ebenen CAD und EAF auf der Grundebene CEDF ſenkrecht.

Anm. Da die Beweiſe der drei vorherg. Sätze von einander ganz unabhängig ſind, ſo kann ein Leſer, welcher daran anſtoßen ſollte, daß früher von ſenkrechten Ebenen geſprochen wird, ehe noch die Möglichkeit derſelben nachgewieſen iſt, — dieſe iſt aber an ſich klar, — §. 31 den beiden andern voranſtellen.

§. 32. Zuſatz.

Wenn eine Linie auf zwei durch ihren Fußpunkt in einer Ebene gezogenen Linien ſenkrecht iſt, ſo iſt ſie auch auf jeder dritten Linie ſenkrecht, die durch ihren Fußpunkt in der Ebene gezogen wird.

Iſt nehmlich in Fig. 22. AB ⊥ CD und EF, ſo iſt auch AB ⊥ GH.

Bew. Lege durch AB und CD, AB und EF und AB und GH Ebenen; — dann ſind zunächſt die Ebenen CAD und EAF auf der Grundebene CEDF nach dem vorherg. §. ſenkrecht, weil die Kante AB nach d. V. auf den Durchſchnittslinien CD und EF ſenkrecht iſt. Wird nun eine von dieſen Ebenen z. B. DAC mit der dritten Ebene HAG verbunden, ſo kommt der vorletzte Satz zur Anwendung, indem nach dem eben Bewieſenen die Ebene CAD auf der Grundebene CEDF und die Kante AB n. d. V. auf der zugehörigen Durchſchnittslinie CD ſenkrecht iſt; daher iſt auch (Ebene HAG auf der Grundebene CEDF und) Kante AB auf der Durchſchnittslinie GH ſenkrecht, w. z. e. w.

§. 33. Erklärung.

Eine Linie heißt auf einer Ebene ſenkrecht, wenn ſie auf allen durch ihren Fußpunkt in der Ebene gezogenen Linien ſenkrecht iſt.

§. 34. Zuſatz.

1) Eine Linie iſt auf einer Ebene ſchon dann ſenkrecht, wenn ſie auf zwei ſich ſchneidenden Linien in der Ebene ſenkrecht ſteht.

2) Wenn zwei ſich ſchneidende Ebenen auf einer dritten ſenkrecht ſtehen, ſo iſt auch ihre gemeinſchaftliche Kante auf der dritten Ebene ſenkrecht.

3) Wenn zwei Ebenen auf einander ſenkrecht ſtehen, ſo iſt jede Linie, welche in der einen Ebene auf der Durchſchnittslinie ſenkrecht iſt, auch ein Loth auf der andern Ebene.

4) Iſt eine Linie ein Loth auf einer Ebene, ſo iſt jede durch die Linie gelegte Ebene auf der gegebenen Ebene ſenkrecht.

Bew. 1) Wenn AB (Fig. 22.) auf CD und EF ſenkrecht iſt, ſo iſt ſie nach §. 32 auch auf jeder dritten Linie GH ſenkrecht, die in der Ebene CEDF durch ihren Fußpunkt B gezogen wird, und daher auch nach der Erkl. §. 33 ein Loth auf der Ebene CEDF.

2) Sind die Ebenen ACD und AEF (Fig. 21.) auf der Grundebene CEDF ſenkrecht, ſo iſt auch die Kante AB nach §. 29 auf den Durchſchnittslinien CD und EF und daher nach (1) auf der Grundebene ſelbſt ſenkrecht.

3) Es ſei Ebene ACD ⊥ CEDF (Fig. 21.) und AB ⊥ CD; — ziehe in der Grundebene CEDF durch B eine beliebige Linie EF und lege durch dieſelbe und AB eine Ebene. Da n. d. V. die Ebene ACD auf der Grundebene CEDF und die Kante AB auf der zugehörigen Durchſchnittslinie CD ſenkrecht iſt, ſo ſteht nach §. 30 auch (die zweite Ebene AEF auf der Grundebene und) AB auf der Durchſchnittslinie EF ſenkrecht, folglich iſt AB nach (1) ein Loth auf der Ebene CEDF, weil ſie ⊥ CD und EF iſt.

4) Das gegebene Loth ſei AB (Fig. 21.); — lege durch AB zwei beliebige Ebenen ACD und AEF. Da n. d. V. AB auf den Durchſchnittslinien CD und EF ſenkrecht iſt, ſo müſſen auch die beiden Ebenen ACD und AEF nach §. 31 auf der Grundebene CEDF ſenkrecht ſtehen.

§. 35. Zuſatz.

1) Durch einen Punkt in einer Linie und eben ſo

2) durch einen Punkt außerhalb einer Linie läßt ſich allemal eine und auch nur eine einzige ſenkrechte Ebene legen.

3) Durch eine Linie in einer Ebene kann jedesmal eine, aber auch nur eine einzige ſenkrechte Ebene gelegt werden.

4) In einem Punkte in einer Ebene läßt ſich allemal ein Loth, aber auch nur ein einziges aufrichten.

Bew. 1) Um durch den Punkt A in der Linie BC (Fig. 23.) eine ſenkrechte Ebene zu legen, lege durch BC zwei beliebige Ebenen, ziehe in jeder (nach §. 121, 3. der Plan.) durch A

eine Linie ſenkrecht auf BC, nehmlich AD und AE, und lege durch dieſelbe eine Ebene DAE, welche (nach (1) im vorherg. §.) auf BC ſenkrecht iſt.

Außer dieſer giebt es aber keine zweite auf BC in A ſenkrechte Ebene; denn angenommen es gebe zwei ſolcher Ebenen FED und FEG (Fig. 24.), ſo wird eine beliebige durch BC gelegte Ebene, (die nicht grade durch FE geht), jene Ebenen in zwei Linien AD und AG ſchneiden, und AB müßte als Loth auf beiden Ebenen auch auf den beiden Durchſchnittslinien AD und AG ſenkrecht ſtehen, was (nach §. 18 der Plan.) nicht möglich iſt, da die drei Linien AB, AG, AD in einer Ebene liegen.

2) Soll durch den Punkt D außerhalb der Linie BC (Fig. 23.) eine ſenkrechte Ebene gelegt werden, ſo lege zunächſt durch D und BC eine Ebene und dann durch BC noch irgend eine zweite Ebene; ziehe in der erſten nach der Plan. AD⊥BC und in der zweiten AE⊥BC. Dann iſt (nach (1) im vorherg. §.) die durch AD und AE gelegte Ebene auf BC ſenkrecht.

Wollte man annehmen, daß ſich durch D zwei ſenkrechte Ebenen auf BC (Fig. 25.) legen ließen, ſo würde das Dreieck ADH zwei rechte Winkel enthalten, welches (nach §. 40 d. Plan.) unmöglich iſt.

3) In der Ebene MN (Fig. 26. a u. b) ſei die Linie AB gegeben; — nimm in AB einen beliebigen Punkt C an, ziehe durch denſelben in der Ebene MN eine auf AB ſenkrechte Linie ED, lege durch dieſe Linie eine willkührliche Ebene EFD, ziehe in derſelben (nach §. 121, 3. d. Plan.) CF⊥ED und lege endlich durch AB und CF eine Ebene, welches die verlangte iſt. — Denn da nach der Conſtr. die Kante CE auf den Durchſchnittslinien AB und CF ſenkrecht iſt, ſo ſind (nach §. 31) auch die ſich ſchneidenden Ebenen AEB und ECF auf der Ebene AFB ſenkrecht; alſo iſt die Ebene AFB⊥MN.

Daß aber auf MN nicht zwei Ebenen, die durch AB gehen, ſenkrecht aufgeſtellt werden können, bedarf keines Beweiſes, da alle rechten Flächenwinkel einander gleich ſein müſſen.

4) Iſt auf MN (Fig. 27.) in A ein Loth aufzurichten, ſo ziehe in MN durch A eine beliebige Linie BC, lege durch dieſe nach (3) eine ſenkrechte Ebene und ziehe in derſelben (nach der Plan.) durch A eine Linie AD ⊥ BC. — Dieſe Linie muß (nach (3) des vorherg. §.) auch auf der Ebene MN ſenkrecht ſein, da ſie in einer ſenkrechten Ebene ſenkrecht auf die Kante gezogen iſt.

Wäre es möglich, in A zwei Lothe AD und AE (Fig. 28.) auf MN aufzurichten, ſo würde die durch dieſelben gelegte Ebene die Grundebene in einer Linie FG durchſchneiden, auf welcher nach der Annahme AD und AE ſenkrecht ſtehen müßten, was der Plan. widerſpricht, da alle drei Linien AD, AE und FG in einer Ebene liegen.

§. 36. Zuſatz.

1) Wenn man in einem Punkte einer Linie drei oder mehr Lothe aufrichtet, ſo liegen dieſelben ſämmtlich in einer einzigen Ebene, welche auf der gegebenen Linie ſenkrecht iſt.

2) Zwei Ebenen, welche auf einer Linie ſenkrecht ſtehen, ſind parallel, und umgekehrt

3) wenn eine Linie auf einer von zwei parallelen Ebenen ſenkrecht ſteht, ſo iſt ſie auch ein Loth auf der andern.

Bew. 1) Die Lothe ſeien DE, FG, HL (Fig. 29.); — lege durch DE und FG eine Ebene und durch DE und HL ebenfalls eine Ebene; da beide Ebenen auf AC ſenkrecht ſind, und (nach (1) im vorherg. §.) ſich durch einen Punkt in einer Linie nur eine ſenkrechte Ebene legen läßt, ſo müſſen folglich beide Ebenen in eine zuſammenfallen. Demnach liegen DE, FG, HL in der nehmlichen Ebene; daſſelbe gilt eben ſo von vier und mehr Linien.

2) Wenn die Ebenen MN und PQ auf AB (Fig. 30.) ſenkrecht ſind, ſo können ſie nach (2) im vorherg. §. in keinem Punkte zuſammentreffen; folglich ſind ſie parallel.

3) Iſt MN ∥ PQ und ⊥ AB (Fig. 30.), ſo muß auch PQ ⊥ AB ſein; denn wenn dieß nicht Statt fände, würde ſich

durch B eine andere auf AB ſenkrechte Ebene legen laſſen, die nach (2) ebenfalls mit MN parallel ſein müßte; nach §. 16, 2. iſt es aber nicht möglich, daß durch einen Punkt B zwei einer dritten parallele Ebenen gehen.

Anm. Aus (1) folgt, daß wenn ein rechter Winkel um einen Schenkel als Achſe gedreht wird, der andere Schenkel eine Ebene beſchreibt. — Die Behauptungen (2) und (3) hätten ſich auch ſehr leicht direct aus §. 14, 2. u. §. 15 ableiten laſſen.

§. 37. Lehrſatz.

1) Zwei Linien, welche auf einer Ebene ſenkrecht ſtehen, ſind parallel, und umgekehrt

2) wenn von zwei Parallelen die eine ein Loth auf einer Ebene iſt, ſo ſteht die andere ebenfalls ſenkrecht.

Bew. 1) Die Lothe ſeien AB und CD (Fig. 31.); — lege durch AB und D eine Ebene und eben ſo auch durch CD und B; dieſe Ebenen ſind beide (nach §. 34, 4.) auf der Grundebene MN ſenkrecht, weil jede durch ein Loth gelegt iſt, und da ſie offenbar die Grundebene in derſelben Linie BD durchſchneiden, ſo können ſie überhaupt nicht von einander verſchieden ſein, ſondern fallen in eine Ebene zuſammen. Demnach liegen AB und CD in einer Ebene und ſind nun (nach §. 33, 1. der Plan.) parallel, weil ſie auf derſelben Linie BD ſenkrecht ſtehen.

2) Es ſei AB ∥ CD und AB ⊥ MN; — lege durch die beiden Parallelen eine Ebene, die (nach §. 34, 4.) auf der Grundebene MN ſenkrecht ſteht, weil ſie durch das Loth AB gelegt iſt; weiter iſt aber CD ∥ AB und daher auch (nach §. 33, 2. d. Plan.) CD ⊥ BD. Wenn aber in einer Ebene ABDC, die auf einer andern MN ſenkrecht iſt, eine Linie CD auf der Kante BD ſenkrecht ſteht, ſo iſt dieſe Linie auch (nach §. 34, 3.) ein Loth auf der andern Ebene MN w. z. e. w.

§. 38. Zuſatz.

1) Aus einem Punkte außerhalb einer Ebene läßt ſich al mal ein und auch nur ein einziges Loth fällen.

2) Durch eine beliebige Linie im Raume läßt ſich allemal eine Ebene ſenkrecht auf eine gegebene Ebene legen, und wenn die Linie nicht ſelbſt ein Loth auf der gegebenen Ebene iſt, ſo giebt es nur eine ſenkrechte Ebene, welche durch die Linie geht.

Bew. 1) Soll aus A auf MN (Fig. 31.) ein Loth gefällt werden, ſo errichte in einem beliebigen Punkte D von MN (nach §. 35, 4.) das Loth CD, lege durch daſſelbe und A eine Ebene und ziehe in dieſer AB || CD, ſo iſt AB (nach (2) des vorherg. §.) das geſuchte Loth.

Es können aber aus A nicht 2 Lothe gefällt werden, weil dieſe mit der Verbindungslinie ihrer Fußpunkte ein Dreieck mit zwei rechten Winkeln bilden würden.

2) Die gegebene Linie ſei AB (Fig. 32.); — aus einem beliebigen Punkte C in AB ziehe auf MN das Loth CD und lege durch dieſes und AB eine Ebene, welche (nach §. 34, 4.) ſenkrecht auf MN iſt.

Angenommen es gingen (Fig. 33.) durch die Linie AB, die nicht ſelbſt ſenkrecht auf MN ſein ſoll, zwei ſenkrechte Ebenen, ſo läßt ſich aus dem nehmlichen, übrigens beliebigen Punkte C in AB auf jede Durchſchnittslinie ein Loth ziehen; da dieſe Lothe CD und CE aber in ſenkrechten Ebenen gezogen wären, ſo müßten ſie (nach §. 34, 3.) beide auf der Grundebene ſenkrecht ſtehen, welches nach (1) unmöglich iſt.

Anm. Wenn die Linie AB ſelbſt auf MN ſenkrecht iſt, ſo iſt nach §. 34, 4. jede beliebige durch AB gelegte Ebene auf MN ſenkrecht.

§. 39. Zuſatz.

1) Das Loth iſt die kleinſte Linie, welche ſich aus einem Punkte außerhalb einer Ebene nach derſelben ziehen läßt, und heißt daher der Abſtand des Punktes von der Ebene.

2) Gehen mehrere Linien aus einem Punkte nach einer Ebene, ſo ſind diejenigen gleich, deren Fußpunkte vom Fußpunkte des Lothes gleich weit abſtehen, und die Linien werden um ſo größer, je mehr ſich ihre Fußpunkte vom Fußpunkte des Lothes entfernen.

3) Lothe zwiſchen parallelen Ebenen ſind gleich, und man ſagt daher: parallele Ebenen ſtehen überall gleich weit von einander ab.

4) Wenn vier oder mehr Punkte von einer Ebene an derſelben Seite gleich weit abſtehen, ſo liegen ſie alle in der nehmlichen Ebene, die zur gegebenen Ebene parallel iſt.

Der Beweis von (1) und (2) iſt derſelbe, wie in der Planimetrie (§. 63), und (3) und (4) ſind, da die Lothe parallel laufen, bereits in §. 18 erwieſen.

Anm. Die Behauptung (3) iſt das Gegenſtück zu §. 73, 3. der Planimetrie. — Weiter ſind auch folgende Sätze mehr oder weniger leicht zu erweiſen:

1) Iſt eine Linie einer Ebene parallel, ſo haben alle Punkte derſelben von der Ebene gleichen Abſtand, und umgekehrt eine Linie iſt einer Ebene parallel, wenn zwei Punkte derſelben von der Ebene gleich weit abſtehen.

2) Wenn zwei Linien nicht in derſelben Ebene liegen, ſo giebt es allemal eine und auch nur eine einzige Linie, welche auf den beiden gegebenen Linien ſenkrecht ſteht; dieſe Linie iſt der kürzeſte Abſtand derſelben von einander. (Sie wird gefunden, wenn man durch die eine gegebene Linie eine der andern parallele Ebene, dann durch die andere Linie auf die parallele Ebene eine ſenkrechte Ebene legt und in dieſer da, wo ſie die erſte Linie ſchneidet, auf der Durchſchnittslinie beider Ebenen ein Loth aufrichtet.)

§. 40. Erklärung.

Wenn man die Schenkel eines Flächenwinkels mit einer Ebene durchſchneidet, welche auf der Kante ſenkrecht ſteht, ſo ſchließen die Durchſchnittslinien (auf der Seite, auf welcher der Flächenwinkel liegt,) einen ebenen Winkel ein, welcher der zum Flächenwinkel gehörige Linienwinkel genannt wird.

§. 41. Zuſatz.

1) Die Ebene des Linienwinkels iſt ſenkrecht auf den Schenkeln des Flächenwinkels, und

2) jede Ebene, welche auf den Schenkeln des Flächenwinkels ſenkrecht ſteht, iſt die Ebene des zugehörigen Linienwinkels

3) Es iſt gleichgültig, durch welchen Punkt der Kante d Ebene des Linienwinkels gelegt wird.

Bew. (1) und (2) sind vermöge §. 34, 4. u. 34, 2. an sich klar.

3) Werden in zwei beliebigen Punkten A und B (Fig. 34.) in der Kante die Linienwinkel CAD und EBF construirt, so müssen dieselben, weil ihre Schenkel parallel laufen, nach §. 19 gleich sein.

§. 42. Lehrsatz.

1) Gleiche Flächenwinkel haben gleiche Linienwinkel, und umgekehrt

2) zu gleichen Linienwinkeln gehören auch gleiche Flächenwinkel.

3) Flächenwinkel verhalten sich wie die zugehörigen Linienw.

Bew. 1) Es sei Flächenw. ADEC = FKLH (Fig. 35.); — lege die Flächenwinkel so zusammen, daß sie sich decken, nehmlich so, daß Punkt B auf G, Kante DE auf KL, Schenkel (Ebene) CDE auf HKL und Schenkel ADE auf FKL fällt. Dann fällt auch AB auf FG und BC auf GH, weil diese Linien mit den Kanten DE und KL rechte Winkel bilden, und die Ebenen, in denen sie liegen, zusammengefallen sind; demnach ist Linienw. ABC = FGH.

2) Es sei Linienw. ABC = FGH (Fig. 35.); — lege die Flächenw. so zusammen, daß sich die gleichen Linienw. decken, nehmlich Punkt B auf G, Schenkel AB auf FG und Schenkel BC auf GH fällt. Dann fällt auch Kante DE auf KL, weil sie auf den Ebenen der Linienwinkel, die man so eben zusammengelegt hat, senkrecht stehen; nun ist auch Ebene ADE mit FKL und CDE mit HKL zusammengefallen; folglich ist der Flächenw. ADEC = FKLH.

3) Bestimme zuerst das Verhältniß der Linienw.; — angenommen es verhalte sich (Fig. 36.) Linienw. ABC : FGH = 3:2, so giebt es einen dritten Winkel, welcher in ABC 3mal und in FGH 2mal enthalten ist; — trage diesen auf ABC 3mal und auf FGH 2mal auf, und lege durch die Kanten und die Theilungslinien Ebenen, so theilen diese den Flächenw. ADEC in 3 und FKLH in 2 gleiche Theile, und es verhält sich folglich

Flächenw. ADEC : FKLH = 3 : 2; da nun auch nach der Annahme Linienw. ABC : FGH = 3 : 2 war, so verhalten sich folglich die Flächenw. grade wie die zugehörigen Linienwinkel.

Anm. Will man dem vorstehenden Beweise dadurch das Ansehen größerer Allgemeinheit geben, daß man statt der bestimmten Zahlen 3 und 2 unbestimmte Zeichen m und n setzt, so wird man doch im Uebrigen den obigen Beweis buchstäblich beibehalten können. — Außerdem wird man auch noch bald die Uebereinstimmung des obigen Beweises mit den Beweisen der §§. 132, 155 u. 180 in der Planimetrie bemerkt haben und eben so ohne Schwierigkeit im Stande sein, das in der Anm. zu §. 132 über die Vergleichung irrationaler Verhältnisse Gesagte auf den vorliegenden Fall zu übertragen.

§. 43. Zusatz.

1) Zum flachen und zum rechten Flächenwinkel gehören auch ein flacher und ein rechter Linienwinkel; dasselbe gilt auch von den Ausdrücken: hohl, erhaben, spitz, stumpf.

2) Nennt man den 180sten Theil eines flachen Flächenwinkels einen Grad, den 60sten Theil des Grades eine Minute u. s. f., so hat vermöge (3) im vorherg. §. der Flächenwinkel allemal eben so viel Grade, Minuten u. s. w., als der zugehörige Linienwinkel.

Bemerk. Es folgt aber hieraus, daß in der Rechnung, in welcher niemals die Größen selbst, sondern nur ihre Maaße (Zahlenwerthe) in Anwendung kommen, sich die Flächenwinkel allemal mit ihren zugehörigen Linienwinkeln vertauschen lassen.

§. 44. Zusatz.

1) Wenn zwei Ebenen mit einander schiefe Nebenflächenwinkel bilden, so fällt ein Loth aus einem Punkte der einen allemal auf die Seite des spitzen Nebenwinkels.

2) Wenn zwei Ebenen sich unter schiefen Winkeln schneiden, und man fällt aus einem Punkte der einen ein Loth auf die andere Ebene und auch aus demselben Punkte ein Loth auf die Kante und legt dann durch beide Lothe eine Ebene, so ist diese auf der Kante senkrecht und folglich die Ebene des zu Linienwinkels.

3) Daſſelbe wird auch erhalten, wenn man aus einem Punkte der einen Ebene ein Loth auf die andere Ebene fällt, dann aus dem Fußpunkte dieſes Lothes ein Loth auf die Kante zieht und durch beide Lothe eine Ebene legt.

Bew. 1) Die ſich ſchief durchſchneidenden Ebenen ſeien ABC und BDCE (Fig. 37.), und der in der einen gegebene Punkt ſei A; lege durch denſelben (nach §. 35, 2.) ſenkrecht auf die Kante BC eine Ebene, welche die beiden andern Ebenen in AF und DE durchſchneidet; — dann ſind AFE und AFD die zu den ſchiefen Flächenwinkeln gehörigen Linienwinkel, und eine aus A auf DE ſenkrecht gezogene Linie AG muß (nach §. 41, 4. d. Plan.) auf die Seite des ſpitzen Linienw. AFE fallen. Dieſe Linie AG iſt aber auch auf der Ebene BCE (nach §. 34, 3.) ſenkrecht, da ſie in einer ſenkrechten Ebene ADE ſenkrecht auf die Kante DE gezogen iſt.

2) Aus A (Fig. 37.) ſei auf die Grundebene BCE das Loth AG und auf die Kante BC das Loth AF gezogen; — lege durch beide Lothe eine Ebene und ziehe in derſelben FH ∥ AG; — dann iſt FH (nach §. 37, 2.) ebenfalls ein Loth auf der Grundebene und daher ∠ HFC = 90°; nach der Conſtr. iſt auch ∠ AFC = 90°; demnach iſt BC ⊥ FH u. FA, alſo auch ſenkrecht auf der Ebene DHE, w. z. e. w.

3) Iſt aus A das Loth AG auf die Grundebene herabgelaſſen, und aus G die Linie GF ſenkrecht auf die Kante BC gezogen, ſo iſt zunächſt die durch beide Linien gelegte Ebene, da ſie durch das Loth AG geht, (nach §. 34, 4.) auf der Grundebene ſenkrecht; nun iſt aber nach der Conſtruction BC ſenkrecht auf der Durchſchnittslinie DE und daher (nach §. 34, 3.) auch ſenkrecht auf der Ebene DHE, w. z. e. w.

Anm. Die in §. 27 u. 28 aufgeſtellten Behauptungen laſſen nun auch folgende Beweiſe zu: Es ſei MN ∥ PQ (Fig. 38.); lege durch einen beliebigen Punkt C der einen Kante BD eine ſenkrechte Ebene, welche auch die andere Kante EG, die mit BD parallel iſt, ſenkrecht durchſchneidet; dann ſind ACH und AFK die zu den Flächenw. ABDH und AEGK gehörigen Linienw. Weil aber die Durchſchnittslinie CH ∥ FK iſt, ſo iſt auch Linienw. ACH = AFK, alſo auch Flächenw. ABDH = AEGK.

Iſt umgekehrt Flächenw. ABDH = AEGK und Kante BD ‖ EG gegeben und wie vorhin conſtruirt, ſo iſt wegen der Gleichheit der Flächenw. auch Linienw. ACH = AFK, deshalb CH ‖ FK, und da überdieß BD ‖ EG vorausgeſetzt iſt, ſo iſt auch nach §. 14, 2. Ebene MN ‖ PQ.

C. Von Projectionen.

§. 45. Erklärung.

Liegt ein Punkt außerhalb einer Ebene, und man zieht aus dem Punkte ein Loth auf die Ebene, ſo heißt der Fußpunkt des Lothes die Projection des gegebenen Punktes auf die gegebene Ebene. Dieſe Ebene wird auch die Projections- oder Grundebene und das Loth die projicirende Linie genannt.

Denkt man ſich ſämmtliche Punkte einer beliebigen (graden oder krummen, begrenzten oder unbegrenzten) Linie auf die Grundebene projicirt, ſo wird durch die Projectionen derſelben im Allgemeinen wieder eine zuſammenhängende Linie beſtimmt, welche die Projection der gegebenen Linie heißt. Die ebene oder krumme Fläche, in welcher ſämmtliche projicirende Linien liegen, heißt die projicirende Ebene oder Fläche.*)

Projicirt man ferner alle Grenzen einer gradlinigen oder krummlinigen Figur auf die Grundebene, ſo ſchließen die Projectionen dieſer Grenzen (im Allgemeinen) ebenfalls eine Figur ein, welche die Projection der gegebenen Figur genannt wird.

Die Linie, in welcher eine ebene oder krumme Fläche die Grundebene ſchneidet, heißt Grundſchnitt.

§. 46. Zuſatz.

1) Als Projection eines Punktes in der Grundebene iſt dieſer Punkt ſelbſt anzuſehen. — Aehnliches gilt von einer Linie oder Figur in der Grundebene.

2) Steht eine grade Linie auf der Grundebene ſenkrecht, ſo iſt ihre Projection ein Punkt, nehmlich der Durchſchnittspunkt

*) Dergleichen krumme Flächen nennt man auch Cylinderflächen (im weitern Sinne).

der Linie mit der Grundebene. — Iſt aber die grade Linie nicht ſenkrecht auf der Grundebene, ſo iſt ihre Projection jedenfalls eine grade Linie, und die projicirende Fläche iſt eine Ebene, welche auf der Grundebene ſenkrecht ſteht.

3) Die Projection einer krummen Linie iſt im Allgemeinen wieder eine krumme Linie; ſie wird eine grade Linie, wenn die gegebene krumme Linie ganz in einer auf der Grundebene ſenkrechten Ebene liegt.

Beweis zu (2). Die projicirenden Linien der einzelnen Punkte der Linie AB (Fig. 39.) ſind parallel und liegen daher ſämmtlich in der durch AB und eine von ihnen gelegten Ebene. Die Projectionsfläche iſt folglich eine Ebene, die nach §. 34, 4. auf der Grundebene ſenkrecht ſteht, und die Projectionen der einzelnen Punkte liegen im Durchſchnitt ab dieſer Ebene mit der Grundebene, alſo in einer graden Linie.

§. 47. Zuſatz.

1) Laufen zwei Linien, (die nicht ſenkrecht auf der Grundebene ſtehen) parallel, ſo ſind auch ihre projicirenden Ebenen, und folglich auch ihre Projectionen parallel.

2) Schneiden ſich zwei Linien, ſo treffen auch ihre Projectionen in einem Punkte zuſammen, welcher die Projection des Durchſchnittspunktes der gegebenen Linien iſt.

3) Sind zwei Ebenen parallel, ſo ſind auch ihre Grundſchnitte parallel.

4) Schneiden ſich zwei Ebenen, ſo vereinigen ſich entweder ihre Durchſchnittslinie und die beiden Grundſchnitte in dem nehmlichen Punkte, oder dieſe drei Linien ſind einander ſämmtlich parallel.

5) Iſt eine Linie auf einer Ebene ſenkrecht, ſo iſt auch die Projection der Linie auf dem Grundſchnitt der Ebene ſenkrecht.

Bew. 1) Die gegebenen Parallelen ſeien AB und CD (Fig. 39.), ihre Projectionen ab und cd; — wähle in jeder der gegebenen Linien einen beliebigen Punkt E und F und ziehe die projicirenden Linien Ee und Ff, welche als Lothe auf der Grundebene parallel ſind. Da nun aber nach d. Vorausſ. auch AB

und CD parallel ſind, ſo iſt folglich (nach §. 14, 2.) Ebene ABba || CDdc und daher auch die Durchſchnittslinie oder Projection ab || cd (§. 15).

2) Wenn ſich die gegebenen Linien AB und CD (Fig. 40.) im Punkte E durchſchneiden, ſo ſchneiden ſich die projicirenden Ebenen in einer Linie Ee, welche als Durchſchnittslinie zweier ſenkrechten Ebenen (nach §. 34, 2.) ein Loth auf der Grundebene iſt; demnach iſt der Durchſchnittspunkt e der beiden Projectionen ab und cd die Projection des Durchſchnittspunktes E der gegebenen Linien AB und CD.

(3) und (4) ſind unmittelbare Folgerungen beziehlich aus §. 15 und 11.

5) Die gegebene Ebene ſei ABD (Fig. 41.), die auf derſelben ſenkrechte Linie CE, ihre Projection Cc; — da die projicirende Ebene Ece auf der Grundebene und auch auf der Ebene ABD ſenkrecht ſteht, weil ſie durch das Loth ED gelegt iſt, ſo muß ſie (nach §. 34, 2.) auch auf der Kante AB ſenkrecht ſtehen; demnach iſt auch AB ein Loth auf eC.

§. 48. Erklärung.

Der Winkel, welchen eine ſchiefe Linie mit ihrer Projection auf eine gegebene Ebene (Grundebene) bildet, heißt **der Neigungswinkel der Linie gegen die Ebene.**

§. 49. Zuſatz.

1) Der Neigungswinkel iſt der kleinſte, welchen eine ſchiefe Linie mit Linien durch ihren Fußpunkt in der Ebene gezogen bildet.

2) Parallele Linien ſind gegen eine ſchneidende Ebene gleich geneigt, und eben ſo iſt

3) eine Linie gegen zwei ſchneidende parallele Ebenen gleich geneigt.

Bew. 1) Die ſchiefe Linie ſei AB (Fig. 42.), ihre Projection BC, und BD irgend eine andere in der Grundebene durch B gezogene Linie; — aus einem beliebigen Punkte E in AB fälle auf BC das Loth EF, welches (nach §. 34,

ſenkrecht auf der Grundebene ſtehen muß, da es in einer ſenkrechten Ebene ſenkrecht auf die Kante gezogen iſt; mache BG = BF und ziehe EG. Dann iſt in den Dreiecken EBF und EBG Seite EB = EB, BF = BG, aber (nach §. 39, 1.) die dritte Seite EF < EG, daher muß auch (nach §. 57 d. Plan.) der gegenüberliegende Winkel EBF < EBG ſein.

2) Sind die Linien AB und CD (Fig. 43.) parallel, ſo ſind auch ihre Projectionen BE und DF (nach §. 47, 2.) parallel und daher (nach §. 19) die Neigungsw. ABE und CDF einander gleich.

3) Wird durch die ſchiefe Linie AB (Fig. 44.) eine auf MN ſenkrechte Ebene gelegt, ſo muß dieſe Ebene auch auf der parallelen Ebene PQ (nach §. 28) ſenkrecht ſtehen; demnach ſind ABD und ACE die Neigungswinkel der ſchiefen Linie gegen die parallelen Ebenen MN und PQ, und dieſe Winkel ſind gleich, da (nach §. 15) BD || CE iſt.

Anm. Auch folgende Sätze ſind nicht ſchwer zu erweiſen:

1) Wenn eine Linie gegen eine Ebene ſchief geneigt iſt, und durch ihren Fußpunkt in der Ebene zwei Linien gezogen ſind, welche von der Projection zu beiden Seiten um gleiche Winkel abweichen, ſo bilden dieſe Linien auch mit der ſchiefen Linie gleiche Winkel.

2) Wenn dagegen eine Linie in der Ebene durch den Fußpunkt der ſchiefen Linie gezogen von der Projection um einen größern Winkel, als eine andere (auf derſelben Seite oder auf verſchiedenen Seiten) abweicht, ſo bildet ſie auch mit der ſchiefen Linie einen größern Winkel, als die andere.

3) Eine ſchiefe Linie kann daher nie mit drei durch ihren Fußpunkt in der Ebene gezogenen Linien gleiche Winkel bilden. — Dieß gilt alſo allein von der ſenkrechten Linie.

4) Zwei ſchiefe Linien ſind parallel, wenn ihre Projectionen parallel laufen, und wenn ſie mit dieſen nach derſelben Seite hin gleiche Winkel bilden.

5) Zwei Ebenen ſind parallel, wenn die Projectionen einer ſchiefen Linie auf die beiden Ebenen parallel laufen. — Dagegen ſind zwei Ebenen nicht nothwendig parallel, wenn auch gegen beide eine ſchiefe Linie gleich geneigt iſt.

§. 50. Erklärung.

Wenn eine ſchiefe Ebene ABCD (Fig. 45.) die Grundebene ſchneidet, und man denkt ſich die ſchiefe Ebene durch eine mit

dem Grundſchnitt AB parallele Linie CD begrenzt, ſo heißt der ſenkrechte Abſtand EF der parallelen Grenzlinie vom Grundſchnitt die Länge, der ſenkrechte Abſtand EG dieſer Linie (CD) von der Grundebene die Höhe und die Projection FG der Länge EF auf die Grundebene die Grundlinie oder Baſis der ſchiefen Ebene.

§. 51. Zuſatz.

Man ſieht hieraus, daß die Länge einer ſchiefen Ebene eine durchaus willkührliche Größe iſt, indem man als ſolche jede beliebige in derſelben auf die Kante ſenkrecht gezogene Linie annehmen kann. Iſt aber die Länge einer gegebenen Ebene einmal feſtgeſtellt, ſo iſt hierdurch auch ihre Höhe und Baſis beſtimmt. Eben ſo iſt leicht zu ſehen, daß bei derſelben Ebene, wie man auch immer ihre Länge annehmen mag, doch zwiſchen Länge, Baſis und Höhe ſtets dieſelben Verhältniſſe ſtatt finden. Daſſelbe gilt eben ſo von zwei Ebenen, welche mit der Grundebene gleiche Winkel bilden.

Anm. Der mit der Trigonometrie bekannte Leſer weiß, daß insbeſondere das Verhältniß der Höhe zur Länge der Sinus, und das Verhältniß der Baſis zur Länge der Coſinus des ſpitzen Winkels genannt wird, unter welchem die ſchiefe Ebene die Grundebene ſchneidet.

§. 52. Lehrſatz.

Wenn in einer ſchiefen Ebene ein Dreieck gezeichnet iſt, und man projicirt daſſelbe auf die Grundebene, ſo verhält ſich der Inhalt des gegebenen Dreiecks zum Inhalt ſeiner Projection, wie die Länge der ſchiefen Ebene zu ihrer Baſis.

Bew. 1) Es ſei zunächſt eine Seite AB (Fig. 46.) des gegebenen Dreiecks ABC mit dem Grundſchnitt DE der ſchiefen Ebene parallel; dann iſt auch die entſprechende Seite ab der Projection abc mit DE und AB parallel*), und da ferner das

*) Denn wenn drei Ebenen — die Grundebene DEc, die ſchiefe Ebene DEC und die projicirende Ebene ABba — ſich in drei Linien DE, AB und ab durchſchneiden und zwei von dieſen Linien AB und DE (nach d. Vorausſ.) parallel lauf ſo ſind ſie (nach §. 11, 2.) alle drei parallel.

Loth Aa || Bb ist, so ist das Viereck ABba ein Parallelogramm und daher auch AB = ab.

Zieht man nun aus C in der schiefen Ebene eine Linie CF senkrecht auf die Linie AB und also auch senkrecht auf die ihr parallele Kante DE und legt durch dieses Loth und das Loth Cc, welches aus demselben Punkte C auf die Grundebene gefällt ist, eine Ebene CFc, so ist diese Ebene (nach §. 44, 2.) senkrecht auf der Kante ED. Demnach ist DE senkrecht auf der in der Ebene CFc liegenden Linie Fc und daher auch die mit DE parallele ab ⊥ Fc. Nimmt man also die Seiten AB und ab als Grundlinien der Dreiecke ABC und abc an, so sind CG und cg ihre Höhen. Da nun die Grundlinie AB und ab oben als gleich erwiesen sind, so verhalten sich die Dreiecke wie ihre Höhen, und es ist folglich

$$\triangle ABC : abc = CG : cg.$$

Weiter sind aber Cc und Gg als Lothe auf der Grundebene parallel; daher verhält sich

$$CG : cg = FG : Fg,$$

also auch $\triangle ABC : abc = FG : Fg.$

Denkt man sich nun die schiefe Ebene durch die zur Kante DE parallele AB begrenzt, so ist FG ihre Länge und Fg die zugehörige Basis. Also verhält sich das Dreieck ABC in der schiefen Ebene zu seiner Projection abc, wie die Länge der schiefen Ebene Fg zur zugehörigen Basis FG.

2) Ist keine Seite des Dreiecks ABC (Fig. 47.) mit dem Grundschnitt DE parallel, so läßt sich dasselbe durch eine Linie AM aus einer Ecke A mit dem Grundschnitt DE parallel gezogen in zwei Dreiecke AMB und AMC zerschneiden, und wenn am die Projection von AM ist, so sind offenbar die Dreiecke abm und acm die Projectionen der Dreiecke ABM und ACM. Da aber die Seite AM mit dem Grundschnitt parallel ist, so verhält sich nach (1), wenn man der Kürze wegen die willkührliche Länge der schiefen Ebene mit l und die zugehörige Basis mit b bezeichnet:

$$\triangle ABM : abm = l : b.$$

(Denn der vorherg. Beweis gilt offenbar auch dann, wenn die Spitze B des zu projicirenden Dreiecks AMB zwiſchen dem Grundſchnitt DE der ſchiefen Ebene und der parallelen Seite AM liegt.) Eben ſo iſt auch

$$\triangle AMC : amc = 1 : b = \triangle AMB : amb,$$

folglich auch

$$\triangle AMB + AMC : amb + amc = 1 : b,$$

d. h. $\triangle ABC : abc = 1 : b$ w. z. e. w.

Anm. Sollte die Parallele AM die Seite BC nicht ſelbſt, ſondern ihre Verlängerung ſchneiden, ſo würde man, ſtatt die Dreiecke zu addiren, dieſelben ſubtrahiren. Man kann aber auch die Ecke A allemal ſo wählen, daß die hindurchgezogene Parallele die gegenüberſtehende Seite ſchneidet.

§. 53. Lehrſatz.

Der Inhalt einer jeden gradlinigen oder krummlinigen Figur in einer ſchiefen Ebene verhält ſich zu ihrer Projection wie die Länge der ſchiefen Ebene zur Baſis.

Bew. Denn die gradlinige Figur läßt ſich in Dreiecke zerſchneiden, die zu ihren Projectionen in dem angegebenen Verhältniſſe ſtehen. Die Projectionen der einzelnen Dreiecke bilden aber zuſammen die Projection der ganzen gegebenen Figur, und wenn alle Theile der einen zu den Theilen der andern das nehmliche Verhältniß haben, ſo müſſen ſich offenbar auch auf gleiche Weiſe die ganzen Figuren verhalten (§. 131, 12. der Plan.).

Der Inhalt einer krummlinigen Figur kann nicht anders gefunden werden, als indem man ſich dieſelbe als ein Polygon von unendlich vielen Seiten denkt. Da nun der Satz von gradlinigen Figuren gilt, ſo muß er auch für krummlinige richtig ſein.

Bemerk. Man hat in den vorherg. Sätzen angenommen, daß die ſchiefe Ebene und die in derſelben gezeichnete Figur ganz auf derſelben Seite des Grundſchnitts liegen. Man begreift aber auf der Stelle, daß jene Sätze richtig bleiben, wenn eine Seite der Figur in den Grundſchnitt fällt; und daſſelbe gilt auch dann noch, wenn die zu projicirende Figur von dem Grun[d]
zwei Theile zerſchnitten wird. Denn da dieſe beide[n]

zu ihren Projectionen, welche zusammen die Projection der gegebenen Figur bilden, wie die Länge zur Basis verhalten, so muß dasselbe offenbar auch von den ganzen Figuren gelten (§. 131, 11. der Plan.).

Anm. 1) Ist der Inhalt einer beliebigen ebenen Figur J, der Inhalt ihrer Projection i und der spitze Winkel, unter welchem die schiefe Ebene die Grundebene schneidet, α, so ist

$$i = J\cos\alpha.$$

Weiter mögen für die mit der Trigonometrie bekannten Leser noch folgende Sätze hier eine Stelle erhalten:

2) Wenn drei Ebenen auf einander senkrecht stehen (je zwei auf der dritten), und eine Linie bildet mit den Kanten (AX, AY, AZ in Fig. 48.) die Winkel α, β, γ, so ist allemal

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1.$$

Denn projicirt man einen beliebigen Punkt B der gegebenen Linie $AB = a$ auf die gegebenen Ebenen und bezeichnet die projicirenden Linien mit x, y, z, so ist

$$\begin{aligned} a^2 &= u^2 + z^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 \\ &= a^2\cos\alpha^2 + a^2\cos\beta^2 + a^2\cos\gamma^2, \end{aligned}$$

also $$1 = \cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2.$$

3) Wenn man eine ebene Figur auf drei Ebenen projicirt, von denen immer je zwei auf der dritten senkrecht stehen, so ist das Quadrat des Inhalts der gegebenen Figur gleich der Summe der Quadrate der Inhalte der drei Projectionen; also, wenn J den Inhalt der gegebenen Figur i_1, i_2, i_3 die Inhalte der drei Projectionen bezeichnen:

$$J^2 = i_1^2 + i_2^2 + i_3^2.$$

Denn wenn man aus A (Fig. 49.) auf die Ebene XYZ der zu projicirenden Figur ein Loth AB fällt, so bildet dieses offenbar mit den drei Kanten dieselben Winkel, wie die Ebene der Figur mit den drei gegebenen Ebenen; (so ist z. B. im rechtw. $\triangle ZAC \angle BAZ = BCA$) sind also diese Winkel, wie vorhin, α, β, γ, so ist nach (1)

$$i_1 = J\cos\gamma, \quad i_2 = J\cos\beta, \quad i_3 = J\cos\alpha,$$

also $$i_1^2 + i_2^2 + i_3^2 = J^2(\cos\gamma^2 + \cos\beta^2 + \cos\alpha^2),$$

oder da $\cos\gamma^2 + \cos\beta^2 + \cos\alpha^2 = 1$ ist:

$$i_1^2 + i_2^2 + i_3^2 = J^2.$$

§. 54. Zusatz.

Die Lage eines Punktes im Raume oder die Lage und Größe einer Linie ist offenbar durch die Projection auf eine Ebene nicht völlig bestimmt. Man nimmt zu dieser Bestimmung am einfachsten zwei sich senkrecht durchschneidende Projectionsebenen an. —

Daß aber durch die Projectionen auf dieſe Ebenen ein Punkt oder eine Linie völlig beſtimmt iſt, fällt bald in die Augen; denn der fragliche Punkt liegt offenbar im Durchſchnitt der beiden projicirenden Linien und die grade oder krumme Linie, deren beide Projectionen gegeben ſind, iſt der Durchſchnitt der beiden projicirenden ebenen oder krummen Flächen. — Außerdem iſt klar, daß die oben erwieſenen Sätze über die Projectionen auf eine Ebene, eben ſo auch von den Projectionen auf die andere Ebene gelten.

Anm. 1. Eine weitere Ausführung dieſer und verwandter, in praktiſcher Hinſicht nicht unwichtigen Lehren hat des beſchränkten Raumes wegen hier keine Stelle erhalten können. Dagegen mögen einige unmittelbare Anwendungen der vorhergehenden Sätze noch kurz erwähnt werden.

Man bedient ſich der bisher betrachteten Projection zur Abbildung von Theilen der Erdoberfläche und nennt dieſelbe zum Unterſchiede von andern Projectionsarten die orthogeaphiſche Projection. Stellt man nach derſelben die nördliche oder ſüdliche Halbkugel dar und nimmt als Projectionsebene den Aequator an, ſo werden die Projectionen der Parallelkreiſe ihnen gleiche Kreiſe und die Projectionen der Meridiane grade Linien, die ſich alle in der Mitte, der Projection des Poles, vereinigen. — Bei der Abbildung der weſtlichen oder öſtlichen Halbkugel nimmt man den erſten Meridian als Projectionsebene an und erhält dann ſtatt des Aequators und der Parallelkreiſe parallele grade Linien; der erſte Meridian bleibt ein Kreis ohne alle Aenderung, die übrigen Meridiane geben Ellipſen *), und der mittelſte, — der auf dem erſten ſenkrecht ſteht, — wird in einer graden Linie abgebildet.

Da bei dieſer Projection die nahe am Umfange liegenden Theile in der auf den Umfang ſenkrechten Richtung allzu ſtark verkürzt und daher die Abbildungen derſelben den wirklich ſtattfindenden Verhältniſſen ſehr unähnlich werden, ſo wendet man bei den Planiglobien unſerer Landcharten gewöhnlich eine andere, die ſtereographiſche Projection an. — Bei dieſer denkt man ſich — in ähnlicher Art, wie beim perſpectiviſchen Zeichnen — das Auge in einen Punkt der Kugeloberfläche, welcher der Mitte des abzubildenden Landes grade gegenüberliegt, von dieſer Mitte nach dem Auge eine Linie gezogen und ſenkrecht auf dieſelbe durch den Mittelpunkt der Kugel die Projectionsebene gelegt. Verbindet man nun den Ort des Auges mit einem der auf die Zeichnung überzutragenden Punkte, ſo iſt der Einſchnitt der Verbindungslinie in die Projectionsebene die geſuchte Projection. — Für die nördliche Halbkugel iſt der Aequator die Projectionsebene und

*) Was eine Ellipſe iſt, pflegen die Schüler eines Gymnaſiums ſchon in Sexta zu erfahren.

der Südpol der Ort des Auges (Polarprojection); die Projectionen der Parallelkreise sind Kreise, die aber sämmtlich kleiner ausfallen, als die Kreise selbst auf der Kugel; die Meridiane liefern grade Linien, die sich in der Mitte vereinigen. — Bei der Abbildung der östlichen oder westlichen Halbkugel ist der erste Meridian die Projectionsebene und die Stelle des Auges ein Punkt des Aequators (Aequatorealprojection), der vom ersten Meridian um 90° absteht. Die Projectionen der Meridiane und der Parallelkreise sind Kreisbogen*); nur statt des Aequators und des mittelsten Meridians erhält man zwei sich senkrecht schneidende Linien.

Für den Seefahrer ist es von besonderer Wichtigkeit, daß diejenige krumme Linie, welche alle Meridiane unter demselben Winkel schneidet, — die loxodromische Curve, — in der Zeichnung als grade Linie dargestellt werde. Um dieses zu erreichen, müssen zunächst die Meridiane selbst als parallele grade Linien aufgezeichnet werden, so daß also die Längengrade, die in der Wirklichkeit gegen den Pol hin abnehmen, durchgehends eine gleiche Größe erhalten. Um aber dennoch das Verhältniß, welches in den einzelnen Gegenden zwischen Längen- und Breitengraden statt findet, richtig darzustellen, vergrößert man die Breitengrade in der Zeichnung eben so vielmal, als in der Wirklichkeit die Längengrade abnehmen. Nach dieser Projection, die zuerst Mercator angewandt hat, werden gewöhnlich Seecharten entworfen. — Länder ganz in der Nähe des Pols lassen sich nach derselben gar nicht darstellen.

Anm. 2. In der Zeichenkunst wird verlangt, daß das Bild möglichst denselben Eindruck im Auge hervorbringe, wie der Gegenstand selbst. Die Wissenschaft, welche die Gesetze entwickelt, deren Beobachtung für diesen Zweck erforderlich sind, heißt Perspective, und zwar Linear- oder geometrische Perspective, insofern nur die verschiedene Lage der abzubildenden Theile eines Gegenstandes in Betracht gezogen wird, zum Unterschiede von der Luftperspective, welche sich mit dem Ton der Farben beschäftigt. — Hier wird allein von der geometrischen Perspective die Rede sein. — Um das Bild eines Gegenstandes auf einer gegebenen Ebene — Tafel — zu erhalten, denkt man sich nach allen Punkten desselben von einem Punkte — dem Auge — aus grade Linien gezogen; die Einschnittspunkte dieser Linien in die Tafel sind die gesuchten Bilder.**) Von diesen gelten folgende Gesetze:

*) Vergl. die Anm. zu § 90.

**) Die abzubildenden Punkte könnten eben sowohl mit dem Auge auf der nehmlichen Seite der Tafel, als auf der entgegengesetzten Seite liegen. In der Zeichenkunst wird die Tafel zwischen das Auge und den Gegenstand gedacht. Bei dem Schatten dagegen, welchen ein leuchtender Punkt in endlicher Entfernung von einem Gegenstande auf einer Ebene — Tafel — erzeugt, befinden sich der leuchtende Punkt und der Gegenstand auf derselben Seite der Tafel.

1) Das Bild eines Punktes iſt wieder ein Punkt. — Sollte die Linie vom Auge nach dem gegebenen Punkte gezogen der Ebene der Tafel parallel laufen, ſo würde es gar nicht möglich ſein, dieſen Punkt auf der Tafel abzubilden.

2) Das Bild einer graden Linie iſt wieder eine grade Linie, nehmlich der Einſchnitt der durch das Auge und die gegebene Linie gelegten Ebene in die Ebene der Tafel. Wären dieſe beiden Ebenen parallel, ſo würde ſich die gegebene Linie auf der Tafel gar nicht abbilden laſſen. — Geht die Linie durch das Auge, ſo iſt ihr Bild ein Punkt, nehmlich ihr Einſchnitt in die Ebene der Tafel.

3) Das Bild einer krummen Linie iſt wieder eine krumme Linie; es wird eine grade Linie, wenn die krumme Linie ganz in einer durch das Auge gehenden Ebene liegt.

4) Wenn zwei Linien **AB** und **CD** (Fig. 50.), — die nicht mit dem Auge **O** in einer Ebene liegen, — unter ſich und mit der Ebene der Tafel parallel laufen, ſo ſind auch ihre Bilder **ab** und **cd** parallel. — Denn die durch **O** und **AB** und **CD** gelegten Ebenen ſchneiden ſich in einer Linie **PQ**, welche nach §. 11, 2., — wenn man ſich durch die Parallelen **AB** und **CD** eine Ebene gelegt denkt, — mit **AB** und **CD** und folglich auch mit der Ebene der Tafel parallel iſt; demnach müſſen auch vermöge §. 10 die Linien **ab** und **cd**, in denen jene Ebenen die Ebene der Tafel ſchneiden, unter ſich und mit **PQ** parallel ſein.

Wenn dagegen die Linien **AB** und **CD** (Fig. 50.) zwar unter ſich, aber nicht mit der Ebene der Tafel parallel ſind, ſo laufen ihre Bilder auf der Tafel, wenn man ſie hinreichend verlängert, in einem Punkte zuſammen. — Denn wenn die Parallelen **AB** und **CD** die Tafel ſchneiden, ſo gilt dieß auch von der ihnen parallelen Kante **PQ**; es müſſen ſich daher auch nach §. 10 die Durchſchnittslinien **ab**, **cd** und **PQ** in einem Punkte vereinigen, (der natürlich in der Ebene der Tafel **abcd** liegt).

Da die Ebene der Tafel gewöhnlich vertical gedacht wird, ſo erklärt ſich hieraus, warum verticale Linien allemal parallele Bilder geben, während dieß nur von ſolchen horizontalen parallelen Linien gilt, die der Ebene der Tafel parallel ſind. Im entgegengeſetzten Fall convergiren die Bilder nach der Seite hin, nach welcher ſich die Linien von der Tafel entfernen, weil offenbar nach dieſer Seite hin ſich **PQ** der Tafel nähert und dieſelbe ſchneidet, (wenn nehmlich — wie immer in der Zeichenkunſt — die Tafel ſich zwiſchen dem Auge und den abzubildenden Linien befindet).

5) Wenn zwei Linien, die nicht in der Ebene der Tafel liege[n] ſich ſchneiden, ſo ſchneiden ſich auch ihre Bilder in dem Punkte, welchem die aus dem Auge nach dem Durchſchnittspunkt der geg[e]nen Linien gezogene Linie die Ebene der Tafel [ge]-ber Linie der Ebene der Tafel parallel, ſo ſind die [Bil]

Zweiter Abſchnitt.

Vom körperlichen Dreieck.

§. 55. Erklärung.

Wenn ſich drei oder mehr Ebenen in Linien (Kanten) durchſchneiden, die alle in demſelben Punkte (Spitze) zuſammenſtoßen, ſo heißt der zwiſchen denſelben liegende, nach einer Seite hin unbegrenzte Raum ein körperliches Vieleck. Die Linienwinkel, welche das Vieleck begrenzen, heißen die Seiten deſſelben und die Flächenwinkel, welche die Ebenen dieſer Linienwinkel, (auf der Seite, auf welcher das Vieleck liegt), einſchließen, werden die Winkel des Vielecks genannt.

So hat z. B. das Vieleck in Fig. 51. die Spitze A, die Kanten AB, AC, AD, AE, zu Seiten die Linienw. BAC, CAD, DAE, EAB, zu Winkeln die Flächenwinkel CBAE, DCAB, EDAC, BEAD. — Der Kürze wegen wird man im Folgenden den Flächenwinkel CBAE auch durch W. (AB) bezeichnen und eben ſo die andern.

Man theilt natürlich die Vielecke in Dreiecke, Vierecke u. ſ. w.

Uebrigens werden im Folgenden nur ſolche Vielecke betrachtet werden, welche hohle Seiten und Winkel haben.

Anm. Durch dieſe Beſchränkung wird der Allgemeinheit wenig Eintrag gethan, da es ſehr leicht iſt, wenn irgendwo in der Anwendung (etwa in der Aſtronomie) ein Vieleck mit erhabenen Seiten oder Winkeln in Betracht gezogen werden ſollte, die Betrachtung auf ein Vieleck mit nur hohlen Seiten und Winkeln zurückzuführen.

§. 56. Lehrſatz.

Wenn man die Seiten und Kanten eines körperlichen Dreiecks über die Spitze fortſetzt, ſo entſteht ein neues Dreieck, welches mit dem gegebenen die Spitze gemein hat und mit demſelben in allen Seiten und Winkeln übereinſtimmt, ohne ihm congruent zu ſein. — Man nennt die beiden Dreiecke Scheiteldreiecke.

Bew. In Fig. 52. haben die Scheitelvielecke ABCD und Abcd die Spitze A gemeinſchaftlich; ferner iſt Linienw. BAC = bAc, BAD = bAd, CAD = cAd und Flächenw. (AB) = (Ab), (AC) = (Ac), (AD) = (Ad). Die Dreiecke ſind aber doch nicht congruent; denn wollte man verſuchen, die Dreiecke zum decken zu bringen, ſo würde man zunächſt ein Paar gleiche Seiten, z. B. CAB und cAb, auf einander legen, ſo daß die Spitze A auf A, Kante AB auf Ab, AC auf ac fällt. Dann würden ſich wohl dieſe Seiten, aber nicht die Dreiecke decken, indem das eine ABCD über, das andere Abcd unter dieſer gleichen Seite liegt. Wollte man, um dieſen Uebelſtand zu vermeiden, das Dreieck DABC nach unten legen, ſo werden ſich die gleichen Seiten BAC und bAc jetzt nicht anders zum decken bringen laſſen, als daß man AB auf Ac und AC auf Ab legt. Dann decken ſich aber die Dreiecke nicht nothwendig, indem nicht Flächenw. (AB) = (Ac) und (AC) = (Ab) vorausgeſetzt iſt. — Demnach ſtimmen die beiden Dreiecke wohl in allen Seiten und Winkeln überein, ſind aber doch nicht congruent.

Bemerk. Aehnliches kann in gleicher Art von körperlichen Vielecken überhaupt dargethan werden.

§. 57. Erklärung.

Zwei körperliche Vielecke, welche in allen Seiten und Winkeln übereinſtimmen, ohne congruent zu ſein, heißen ſymmetriſch.

§. 58. Lehrſatz.

Wenn man aus einem Punkte innerhalb eines Dreiecks Lothe auf die drei Seiten fällt, ſo wird durch dieſe Lothe ein neues Dreieck beſtimmt, deſſen Seiten und Winkel die Winkel und Seiten des gegebenen Dreiecks zu 180° ergänzen.

Bew. Das Dreieck ſei ABCD (Fig. 53.), der innerhalb angenommene Punkt E, die Lothe EF, EG, EH und das neue Dreieck alſo EFGH. — Da die Ebene EHDF durch die Lothe EH und EF geht, ſo iſt ſie auf den Ebenen BAD und CAD ſenkrecht, deshalb HDF der zum Flächenw. (AD) gehörige Linien-

winkel, und da im Viereck EHDF die Winkel bei F und H rechte ſind, ſo iſt Linienw. HEF + HDF = 180°, alſo auch:

Linienw. HEF + Flächenw. (AD) = 180°. *)

Eben ſo iſt:

Linienw. GEF + Flächenw. (AC) = 180°

und " GEH + " (AB) = 180°.

Ferner iſt offenbar Linienw. CFD der zum Flächenw. (EF) gehörige Linienw., und da im Viereck ACFD bei C und D rechte Winkel ſind, Linienw. CAD + CFD = 180°, folglich auch

Linienw. CAD + Flächenw. (EF) = 180°;

eben ſo iſt " BAD + " (EH) = 180°

und " BAC + " (EG) = 180°.

Bemerk. Man hat um größerer Einfachheit willen die Figur ſo entworfen, daß der Punkt A auch innerhalb des Dreiecks EFGH fällt. Sind die Winkel des gegebenen Dreiecks alle ſpitz, ſo kann kein anderer Fall eintreten, wie man auch immer den Punkt (innerhalb des Dreiecks ABCD) wählen mag. Dieſe Wahl iſt jedoch nicht mehr gleichgültig, wenn das gegebene Dreieck auch einen oder mehrere ſtumpfe Winkel enthält, indem dann der Punkt A auch außerhalb des Dreiecks EFGH oder in eine Seite deſſelben fallen kann. Es iſt indeß doch allemal möglich, den Punkt E ſo anzunehmen, daß A in das Dreieck EFGH hineinfällt. Denn wenn man den Linienw. CAD durch irgend eine Linie AF in zwei ſpitze Winkel theilt und durch einen beliebigen Punkt F dieſer Linie zwei Ebenen EGCF und EHDF ſenkrecht auf AC und AD legt, ſo liegt offenbar A zwiſchen den Schenkeln des hohlen Flächenw. (EF). Theilt man nun auch den Linienw. BAD durch irgend eine Linie AH in zwei ſpitze Winkel, und legt durch den Punkt H, in welchem die Linie AH die Linie HD ſchneidet, eine Ebene ſenkrecht auf AB, ſo liegt A auch zwiſchen den Schenkeln des hohlen Flächenw. (EH). Da nun der Punkt A innerhalb der beiden Flächenw.

*) In dieſen Ausdrücken hat man ſich natürlich ſtatt der Größen ihre nach Graden ausgedrückten Zahlenwerthe (Maaße) geſetzt zu denken.

(EF) und (EH) liegt, so muß er offenbar innerhalb des Dreiecks EFGH liegen.

§. 59. Erklärung.

Zwei Dreiecke, in denen die Seiten des einen die Winkel des andern und die Winkel des einen die Seiten des andern zu 180° ergänzen, heißen Ergänzungsdreiecke.

Bemerk. Das Ergänzungsdreieck wird auch erhalten, wenn man in der Spitze eines gegebenen Dreiecks auf den drei Seiten deſſelben Lothe errichtet. Dieſe Conſtructionsweiſe iſt einfacher, als die oben angegebene; ſie läßt ſich aber weniger leicht durch eine Zeichnung veranſchaulichen.

§. 60. Lehrſatz.

In jedem körperlichen Dreiecke iſt die Summe zweier Seiten größer, als die dritte.

Bew. Um zu beweiſen, daß BAC+CAD>BAD (Fig. 54.) iſt, lege an CAB einen Winkel CAE=CAD, nimm in AE und AB zwei beliebige Punkte F und G an, mache AH =AG und ziehe GF, HF und HK; — dann iſt △HAK ≅ GAK (AH=AG, AK=AK, ∠HAK=GAK), folglich HK=GK. Da nun im Liniendreieck HKF bekanntlich HK+KF>HF iſt, ſo iſt auch GF>HF und (nach §. 57 der Plan.) auch ∠GAF>HAF, (weil in den Dreiecken GAF und HAF Seite AF=AF, AG=AH, GF>HF iſt); d. h. es iſt ∠BAC+CAD>BAD.

Bemerk. In der Figur iſt angenommen, daß die beiden Winkel BAC und CAD zuſammen noch keinen Flachen ausmachen; im entgegengeſetzten Falle würde es des Beweiſes, daß ihre Summe >BAD iſt, nicht bedürfen, da BAD (nach §. 55) jedenfalls kleiner, als ein Flacher iſt.

Von Dreiecken aber, welche erhabene Winkel und Seiten enthalten, gilt der Satz nicht mehr.

§. 61. Lehrſatz.

In jedem Dreieck betragen die drei Seiten zuſammen weniger, als zwei Flache.

Bew. Verlängere eine Kante AB des Dreiecks ABCD (Fig. 55.) über die Spitze A nach E, so entsteht ein neues Dreieck AECD. In diesem ist nach dem vorherg. §.:

$$CAD < CAE + DAE;$$

folglich auch:

$$CAD + DAB + CAB < CAE + DAE + DAB + CAB;$$

das heißt, da $CAE + CAB = \pi$ und $DAE + DAB = \pi$ ist, die drei Seiten des Dreiecks ABCD sind zusammen kleiner, als zwei Flache.

§. 62. Zusatz.

In jedem körperlichen Vielecke betragen alle Seiten zusammen weniger, als zwei Flache.

Bew. Es sei zunächst ein Viereck ABCDE (Fig. 56.) gegeben; — erweitere zwei Seiten, die durch eine zwischenliegende getrennt sind, z. B. BAE und CAD bis zum Durchschnitt in AF; dann entsteht ein Dreieck ABCF, in welchem (nach dem vorherg. §.) die drei Seiten zusammen kleiner sind, als 360°, also

$$BAC + CAD + DAF + EAF + BAE < 360°.$$

Weil nun im Dreieck ADEF

$$DAE < DAF + EAF$$

ist, so ist um so mehr:

$$BAC + CAD + DAE + BAE < 360°.$$

Auf ganz ähnliche Weise läßt sich dasselbe für's Fünfeck durch Zurückführen auf das Viereck darthun. Aehnliches gilt vom Sechseck, Siebeneck u. s. w.

§. 63. Lehrsatz.

In jedem körperlichen Dreieck betragen die drei Winkel zusammen mehr, als einen, aber weniger, als drei Flache.

Bew. Sie betragen zunächst weniger, als drei Flache, da jeder (nach §. 55) kleiner, als ein Flacher angenommen ist. Sie machen aber zusammen mehr, als einen Flachen aus; denn bildet man das Ergänzungsdreieck und bezeichnet die Seiten dessel-

den mit α, β, γ, so sind die Winkel des gegebenen Dreiecks $180°-\alpha$, $180°-\beta$, $180°-\gamma$, also alle drei zusammen

$$540°-(\alpha+\beta+\gamma).$$

Nun sind aber (nach §. 61) die Seiten eines jeden Dreiecks zusammen kleiner, als zwei Flache, also

$$\alpha+\beta+\gamma<360°;$$

daher ist $540°-(\alpha+\beta+\gamma)>180°$,

d. h. die Winkelsumme ist größer, als ein Flacher.

§. 64. Lehrsatz.

Sind in einem Dreieck zwei Winkel gleich, so sind auch die gegenüberstehenden Seiten gleich.

Bew. Lege das Dreieck ABCD (Fig. 57.), in welchem Flächenw. (AB) = (AD) vorausgesetzt ist, mit seinem Scheiteldreiecke Abcd so zusammen, daß der Punkt A liegen bleibt, Kante AB auf Ad, Kante AD auf Ab fällt; dann fällt auch Ebene BAC auf dAc, weil nach der Vorauss. W. (AB) = (Ad) ist, und Ebene CAD auf cAb, weil W. (AD) = (Ab) ist. Da nun die Ebenen zusammengefallen sind, so müssen auch die gemeinschaftlichen Kanten AC und Ac auf einander fallen. Demnach ist Linienw. BAC = dAc = DAC.

§. 65. Lehrsatz.

In jedem Dreieck liegt dem größern Winkel auch eine größere Seite gegenüber.

Bew. Es sei im Dreieck ABCD (Fig. 58.) Winkel CDAB > CBAD; mache Winkel EDAB = CBAD; dann ist (nach dem vorherg. §.) im Dreieck ABED Seite EAB = EAD. Nun ist aber im Dreieck AECD Seite EAD + EAC > CAD, also auch EAB + EAC > CAD, d. h. BAC > CAD.

§. 66. Zusatz.

1) Im gleichschenkeligen Dreieck sind die Winkel an der Grundlinie gleich.

2) In jedem Dreieck liegt der größern Seite ein größerer Winkel gegenüber.

Bew. Beide Behauptungen sind unmittelbare Ergebnisse aus den beiden vorherg. §§.

§. 67. Zusatz.

Aus dem vorherg. §. und dem Beweise von §. 64 folgt auch noch, daß gleichschenkelige Dreiecke, welche in allen Seiten und Winkeln übereinstimmen, (niemals blos symmetrisch,) sondern jedesmal wirklich congruent sind.

Bemerk. Die in den vorherg. Sätzen befolgte Anordnung konnte mit der in der Planimetrie bei den verwandten Sätzen (§. 46, 48 u. 49) beobachteten Folge darum nicht übereinstimmen, weil hier das dort angewendete Beweismittel ausfällt, daß die Summe der drei Winkel eines Dreiecks ein Flacher ist. Dagegen hätten die in Rede stehenden Sätze über das Liniendreieck in der Planimetrie ebenso geordnet und bewiesen werden können, wie hier in der Stereometrie die Sätze vom körperlichen Dreieck. — In den nächsten §§. findet fast vollkommene Uebereinstimmung statt.

§. 68. Lehrsatz.

Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich groß, so stimmen die Dreiecke auch in den übrigen gleichliegenden Stücken überein.

Bew. Das eine Dreieck ist entweder dem andern oder dem Scheiteldreieck des andern congruent, welches ebenso wie in der Planimetrie (§. 52) erwiesen wird.

§. 69. Lehrsatz.

Sind in zwei Dreiecken eine Seite und zwei anliegende Winkel gleich groß, so stimmen die Dreiecke auch in den übrigen gleichliegenden Stücken überein.

Der Beweis ist derselbe wie der des vorherg. §.; auch folgt der Satz aus diesem und §. 58.

§. 70. Lehrſatz.

Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten gleich, die eingeſchloſſenen Winkel aber ungleich, ſo liegt dem größern Winkel eine größere Seite gegenüber.

Bew. Dieß wird in ähnlicher Art wie in der Planimetrie (§. 55) bewieſen; doch ſind hier jedenfalls, wenn man das eine Dreieck auf das andere oder auf das Scheiteldreieck des andern legt, ſo daß ein Paar gleiche Seiten zuſammen fallen, in Hinſicht der gegenüberliegenden Kanten drei verſchiedene Lagen möglich, die einzeln behandelt werden müſſen. Fällt dieſe Kante des Dreiecks mit dem kleinern Winkel außerhalb des andern, ſo iſt der Beweis genau derſelbe wie in der Plan.; fällt ſie in das Dreieck, ſo iſt §. 39 d. Plan. anzuwenden, der offenbar auch vom körperlichen Dreieck gilt; fällt ſie in eine Seite, ſo verſteht ſich die Richtigkeit des Satzes von ſelbſt.

§. 71. Lehrſatz.

Stimmen zwei Dreiecke in den drei Seiten überein, ſo ſind auch ihre Winkel gleich.

Der Beweis iſt derſelbe wie in der Planimetrie (§. 56).

§. 72. Lehrſatz.

Sind in einem Dreieck die drei Winkel ſo groß, als in einem andern, ſo ſtimmen die Dreiecke auch in den Seiten überein.

Bew. Stimmen die Dreiecke in den Winkeln überein, ſo ſtimmen ihre Ergänzungsdreiecke offenbar in den Seiten, alſo nach dem vorherg. §. auch in den Winkeln überein, und dem zufolge ſind in den gegebenen Dreiecken die Seiten gleich groß.

§. 73. Lehrſatz.

Wenn zwei Dreiecke in zwei Seiten und einem Winkel an der dritten Seite übereinſtimmen, ſo ſind entweder auch alle übrigen gleichliegenden Stücke in beiden Dreiecken gleich groß, oder die beiden andern Winkel an der dritten Seite ergänzen ſich zu einem Flachen.

da die Größe der Winkel eines regelmäßigen Vielecks mit der Zahl seiner Seiten wächst.

Anm. Durch den vorhergehenden Satz ist nur dargethan, daß es keine andern, als die genannten regelmäßigen Körper geben kann; daß dieselben jedoch wirklich vorhanden sind, ist hiermit noch keineswegs bewiesen. Da der Beweis indeß für das Folgende ohne besondere Wichtigkeit ist, so ist er hier der Kürze wegen übergangen. — Der Anfänger wird übrigens nur durch das Vorzeigen von Modellen eine deutliche Vorstellung von jenen Körpern erhalten können.

§. 77. Erklärung.

Wenn man die Seiten einer körperlichen Ecke durch eine Ebene durchschneidet, so heißt der hierdurch von der Ecke abgeschnittene Körper eine Pyramide. — Eine Pyramide ist also ein eckiger Körper, welcher von einem Vieleck (als Grundfläche) und von Dreiecken, die alle in einem Punkte (Spitze) zusammenstoßen, (als Seitenflächen) eingeschlossen wird.

Das Loth aus der Spitze auf die Grundfläche heißt die Höhe der Pyramide.

§. 78. Zusatz.

In jeder Pyramide ist die Summe der Seitenflächen größer, als die Grundfläche. *)

Bew. Fällt zunächst die Höhe der Pyramide innerhalb (Fig. 59. a) oder in eine Seitenfläche, so ist die Grundfläche gleich der Summe der Projectionen der Seitenflächen auf die Ebene der Grundfläche und also kleiner, als die Summe der Seitenflächen selbst. — Fällt aber die Höhe außerhalb (Fig. 59. b), so ist die Grundfläche sogar kleiner, als die Projectionen zusammen genommen, und folglich um so mehr kleiner, als die Summe der Seitenflächen.

Anm. Wenn in einer dreiseitigen Pyramide, die also von vier Dreiecken eingeschlossen ist, die Ebenen von drei dieser Dreiecke auf einander senkrecht stehen (je zwei auf der dritten), so ist das Quadrat

*) Warum pflegt dieser Satz in den Lehrbüchern der Geometrie zu fehlen, die doch sämmtlich beweisen, daß zwei Seiten eines Dreiecks größer sind, als die dritte?

des Inhalts des vierten Dreiecks gleich der Summe der Quadrate der Inhalte der übrigen Dreiecke (§. 53 Anm.). — Es sind nehmlich die Dreiecke AXY, AXZ, AYZ (Fig. 49.) die Projectionen des Dreiecks XYZ auf drei Ebenen, die auf einander senkrecht stehen.

Dieser Satz hat einige Aehnlichkeit mit dem pythagoriſchen Satze der Planimetrie. — Ueberhaupt ist die Pyramide unter den eckigen Körpern, was das Dreieck unter den Polygonen; während aber die Sätze, welche der Scharfſinn der Mathematiker über das Dreieck aufgefunden hat, kaum zu zählen sind, kennt man nur wenige Eigenſchaften der Pyramide.

§. 79. Erklärung.

Eine Pyramide heißt regelmäßig (im weitern Sinne), wenn ihre Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck und ihre Seitenflächen gleichſchenkelige Dreiecke sind.

§. 80. Zuſatz.

Die Höhe einer regelmäßigen Pyramide trifft die Grundfläche im Mittelpunkte.

Bew. Die rechtwinkeligen Dreiecke GHA und GHB (Fig. 60.) sind congruent, da sie in den Hypotenuſen GA und GB und der gemeinſchaftlichen Cathete GH übereinſtimmen; folglich ist auch AH = BH.

Aus gleichen Gründen ist BH = CH = DH u. ſ. w.; alſo ist H der Mittelpunkt der Grundfläche.

§. 81. Lehrſatz.

Wenn man die Seitenfläche einer Pyramide mit einer der Grundfläche parallelen Ebene durchſchneidet, ſo ist der Durchſchnitt eine der Grundfläche ähnliche Figur, und dieſe beiden ähnlichen Figuren verhalten ſich wie die Quadrate ihrer Abſtände von der Spitze.

Bew. Wenn die Ebene bcde ∥ BCDE (Fig. 61.) ist, ſo sind zunächſt die Linien, in denen ſie von den Seitenflächen geſchnitten werden, n. §. 15 parallel, nehmlich bc ∥ BC, cd ∥ CD, de ∥ DE, be ∥ BE, und daher (nach §. 19) ∠ bcd = BCD, cde = CDE, deb = DEB, ebc = EBC; alſo ſtimmen die Vielecke in allen Winkeln überein. Daſſelbe gilt auch von dem

Verhältniß der gleichliegenden Seiten, da nehmlich bc || BC und cd || CD iſt, ſo verhält ſich:

$$bc : BC = Ac : AC$$

und $$cd : CD = Ac : AC,$$

folglich auch $$bc : BC = cd : CD.$$

Ebenſo wird die Gleichheit der übrigen Verhältniſſe zwiſchen den gleichliegenden Seiten erwieſen. — Demnach iſt Vieleck $bcde \sim BCDE$.

Da ſich nun ähnliche Vielecke (nach §. 166, 2. der Plan.) wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten verhalten, ſo iſt

$$bcde : BCDE = bc^2 : BC^2.$$

Weiter iſt aber $$bc : BC = Ab : AB,$$

und wenn durch die Höhe AG und die Kante AB eine Ebene gelegt wird, ſo ſchneidet dieſe die parallelen Ebenen in den parallelen Linien bg und BG, und es verhält ſich folglich:

$$Ab : AB = Ag : AG,$$

alſo auch $$bc : BC = Ag : AG$$

und $$bc^2 : BC^2 = Ag^2 : AG^2.$$

Oben iſt $bcde : BCDE = bc^2 : BC^2$ erwieſen; es verhält ſich daher auch

$$bcde : BCDE = Ag^2 : AG^2.$$

Anm. Dieſer an ſich wichtige und für die Ausmeſſung der Pyramide unentbehrliche Satz wird noch durch ſeine vielfachen Anwendungen in der Naturlehre beſonders merkenswerth.

§. 82. Erklärung.

Wenn eine Pyramide von einer der Grundfläche parallelen Ebene durchſchnitten wird, ſo heißt der zwiſchen den beiden parallelen Ebenen enthaltene Theil eine abgekürzte Pyramide.

Die abgekürzte Pyramide wird alſo von zwei parallelen und ähnlichen Vielecken als Grundflächen und von Trapezen als Seitenflächen begrenzt, und die Verlängerungen der Seitenkanten vereinigen ſich alle in dem nehmlichen Punkte.

§. 83. Erklärung.

Ein nach zwei Seiten hin unbegrenzter Raum, der von Ebenen eingeſchloſſen wird, welche ſich ſämmtlich in parallelen

Linien durchſchneiden, heißt ein prismatiſcher Raum, und die ihn begrenzenden Ebenen heißen ſeine Seitenflächen.

§. 84. Zuſatz.

Werden die Seiten eines prismatiſchen Raums von parallelen Ebenen durchſchnitten, ſo ſind die Durchſchnitte congruente Vielecke.

Bew. Sie ſtimmen in allen Winkeln überein, weil ihre Schenkel (nach §. 15) parallel laufen, (AB ‖ ab [Fig. 62.], AD ‖ ad, alſo ∠ BAD = bad u. ſ. f.) und in allen Seiten, weil die von den Seitenflächen abgeſchnittenen Vierecke Parallelogramme ſind (AD ‖ ad, Aa ‖ Dd, folglich auch AD = ad u. ſ. f.)

§. 85. Erklärung.

Wenn man die Seitenflächen eines prismatiſchen Raums durch zwei parallele Ebenen durchſchneidet, ſo heißt der zwiſchen denſelben enthaltene vollſtändig begrenzte Körper ein Prisma. — Ein Prisma iſt alſo ein eckiger Körper, welcher von zwei congruenten und parallelen Vielecken, als Grundflächen, und von Parallelogrammen, als Seitenflächen, eingeſchloſſen wird. Die Linien, in welchen ſich die Seitenflächen eines Prisma durchſchneiden, heißen Seitenkanten oder vorzugsweiſe Kanten; die Durchſchnittslinien zwiſchen den Seitenflächen und den Grundflächen werden Grundkanten genannt.

Der ſenkrechte Abſtand der beiden Grundflächen von einander heißt die Höhe des Prisma's.

Ein Prisma heißt grade, wenn die (Seiten-) Kante auf der Grundfläche ſenkrecht iſt.

§. 86. Zuſatz.

1) Im graden Prisma ſind die Seitenflächen ſämmtlich Rechtecke, und

2) ein Prisma iſt grade, wenn zwei zuſammenſtoßende Seitenflächen Rechtecke ſind.

Bew. 1) Wenn die Kante AE (Fig. 63.) ſenkrecht auf der Grundfläche EFGH ſteht, ſo iſt ∠ AEF = 90°, und daher

(nach §. 70 d. Plan.) das Parallelogramm AEFB ein Rechteck. Daſſelbe gilt ebenſo von den übrigen Seitenflächen; denn wenn eine Kante ein Loth iſt, ſo ſind es (n. §. 37, 2.) auch die übrigen.

2) Wenn die Seitenflächen AEFB und AEHD Rechtecke ſind, ſo iſt AE⊥EF und EH und daher (nach §. 34, 1.) AE auch ein Loth auf der Ebene EFGH.

§. 87. Erklärung.

Ein Prisma, deſſen Grundflächen Parallelogramme ſind, heißt ein Parallelepipedum. — Das Parallelepipedum heißt rechtwinkelig, wenn Grundflächen und Seitenflächen Rechtecke ſind; ſind dieſelben überdieß ſämmtlich Quadrate, ſo entſteht das Hexaeder, welches man auch Würfel oder Cubus nennt.

§. 88. Zuſatz.

1) Im Parallelepipedum ſind auch die gegenüberſtehenden Seitenflächen parallel und congruent. — Man kann daher jedes beliebige Paar gegenüberſtehender Seitenflächen als Grundflächen anſehen.

2) Jeder Körper, welcher von ſechs Parallelogrammen eingeſchloſſen iſt, iſt ein Parallelepipedum.

Bew. 1) Die Seitenflächen AEHD und BFGC (Fig. 64.) ſind nach §. 14, 2. parallel, weil nach d. Vorausſ. z. B. AE ‖ BF und EH ‖ FG iſt. Sie ſind congruent, da ſie in allen Seiten — als gegenüberſtehende Seiten in Parallelogrammen — und in allen Winkeln — wegen der parallelen Schenkel — übereinſtimmen. Daſſelbe gilt von den Seitenflächen ABFE und DCGH.

2) Wenn der Körper ABCDEFGH (Fig. 63.) von ſechs Parallelogrammen eingeſchloſſen iſt, ſo iſt er zunächſt ein Prisma; denn ſeine Grundflächen z. B. ABCD und EFGH ſind — aus denſelben Gründen, wie in (1) — parallel und congruent, und die Seitenflächen ſind (nach d. Vorausſ.) Parallelogramme; er iſt aber auch ein Parallelepipedum, da auch die Grundflächen als Parallelogramme gegeben ſind.

Anm. 1. Nennt man eckige Körper ähnlich, wenn sie von ähnlichen Polygonen eingeschlossen werden und die Ecken des einen den Ecken des andern congruent sind, so lassen sich leicht folgende Sätze erweisen:

1) In ähnlichen Körpern sind die ähnlich liegenden Kanten und Seitenflächen proportionirt, und da sich diese wie die Quadrate ähnlich liegender Kanten verhalten, so stehen auch die ganzen Oberflächen in dem angezeigten Verhältniß zu einander.

2) Die Grundflächen ähnlicher Pyramiden oder Prismen verhalten sich nach (1) wie die Quadrate zweier ähnlich liegenden Seitenkanten, also auch wie die Quadrate der Höhen, da diese mit den Seitenkanten in ähnlichen rechtwinkeligen Dreiecken liegen.

3) Wird eine Pyramide durch eine der Grundfläche parallele Ebene durchschnitten, so ist die abgeschnittene kleinere Pyramide der ganzen ähnlich. (Vergl. Fig. 61. und §. 81.)

Anm. 2. Auch der folgende allgemeine und merkwürdige Satz mag hier noch eine Stelle erhalten:

Bezeichnet man die Zahl der Flächen, welche einen eckigen Körper einschließen mit F, die Zahl seiner Ecken und Kanten beziehlich mit E und K, so ist:

$$F+E=K+2.$$

Hierbei wird jedoch vorausgesetzt, daß die Polygone, welche den Körper begrenzen, von zusammenhängenden gebrochenen Linien eingeschlossen werden; (denn für einen Körper, wie den durch Fig. 68. dargestellten gilt der Satz nicht.)

Bew. Ich will irgend eine Grenzfläche des Körpers die erste nennen und dann die übrigen so weiter zählen, daß jede folgende mit der nächstvorhergehenden eine Kante gemeinschaftlich hat, und wenn eine folgende Fläche mit mehreren vorhergehenden gemeinschaftliche Kanten hat, so sollen diese allemal eine zusammenhängende gebrochene Linie bilden. Diese Bedingung des Zählens ist, wie man leicht sieht, allemal zu erfüllen, den oben angegebenen Ausnahmefall abgerechnet, für welchen aber auch der Satz nicht mehr nothwendig gilt. Es sei ferner die Zahl der Kanten und Ecken, welche in der ersten Fläche liegen, mit K_1 und E_1, dann die Zahl der Kanten und Ecken in den beiden ersten Grenzflächen zusammen mit K_2 und E_2, in den drei ersten mit K_3 und E_3 u. s. f. bezeichnet, so nehmlich, daß eine Ecke oder Kante, welche mehreren Grenzflächen gemeinschaftlich ist, immer nur einmal gezählt wird. Hat nun das erste Polygon a Seiten, so ist $K_1=a$ und $E_1=a$, also

$$K_1-E_1=0.$$

Das zweite Polygon, welches b Seiten haben mag, liefert nur $b-1$ neue Kanten und $b-2$ neue Ecken, weil es eine Kante und zwei Ecken mit dem ersten gemeinschaftlich hat. Demnach ist $K_2=a+b-1$ und $E_2=a+b-2$, folglich

$$K_2-E_2=1.$$

Wird jetzt das dritte Polygon, deſſen Seitenzahl c ſein mag, hinzugefügt, ſo wird dieſes entweder nur mit dem zweiten, oder ſowohl mit dem zweiten, als mit dem erſten eine Kante gemeinſchaftlich haben. — Im erſten Fall liefert es $c-1$ neue Kanten und $c-2$ neue Ecken, im andern Fall $c-2$ neue Kanten und $c-3$ neue Ecken, alſo jedenfalls liefert es eine Kante mehr, als Ecken; demnach iſt offenbar

$$K_3 - E_3 = 2.$$

Man ſieht nun ſchon ganz deutlich, daß auch das vierte Polygon eine neue Kante mehr, als neue Ecken liefert, (es mag nun nur mit dem dritten, oder mit zweien der vorhergehenden, oder mit allen drei Polygonen gemeinſchaftliche Kanten haben, wenn nur überhaupt der Körper mehr als vier Seitenflächen hat); und es iſt folglich

$$K_4 - E_4 = 3.$$

Auf gleiche Weiſe findet man

$$K_5 - E_5 = 4,$$

(wenn nehmlich der Körper mehr als 5 Grenzflächen hat), — und wenn der Körper überhaupt von n Polygonen eingeſchloſſen iſt, und von dieſen $n-1$ in der angegebenen Art verbunden ſind:

$$K_{n-1} - E_{n-1} = n-2.$$

Wird nun noch die letzte, n^{te} Grenzfläche hinzugefügt, ſo iſt klar, daß dieſe weder neue Ecken, noch neue Kanten liefert, und es iſt daher auch

$$K_n - E_n = n-2,$$

oder nach der oben angegebenen Bezeichnungsweiſe, wo $K_n = K$, $E_n = E$ und $n = F$ geſetzt iſt:

$$K - E = F - 2,$$

alſo

$$K + 2 = F + E.$$

Der vorſtehende Satz heißt der Euler'ſche und der ſo eben angeführte ſehr einfache Beweis deſſelben iſt im Weſentlichen aus Grunert's Lehrb. der Stereom. entlehnt.

Der Anfänger wird wohl thun, die Richtigkeit des Satzes für Pyramide und Prisma noch beſonders unabhängig von dem obigen allgemeinen Beweiſe darzuthun.

B. Von den runden Körpern.

§. 89. Erklärung.

Wenn in einer Ebene eine Kreislinie gezeichnet und außerhalb der Ebene ein Punkt gegeben iſt, und man bewegt eine beiderſeits unbegrenzte grade Linie längs der Kreislinie (Directrix) ſo fort, daß ſie zugleich immer durch den gegebenen Punkt

(Spitze) geht, ſo beſchreibt dieſelbe eine krumme Fläche, welche man eine Kegelfläche nennt. — Die Kegelfläche hat alſo die Eigenſchaft, daß Linien, (Seitenlinien), durch die Spitze und einen Punkt der Directrix gezogen, ganz in die krumme Fläche fallen. — Eine Linie durch die Spitze und den Mittelpunkt der Directrix gezogen heißt die Axe der Kegelfläche.

§. 90. Zuſatz.

1) Legt man durch die Spitze und zwei Punkte der Directrix eine Ebene, ſo ſchneidet dieſe die Kegelfläche in zwei graden Linien.

2) Eine Ebene, welche mit der Directrix parallel iſt, ſchneidet die Kegelfläche in einem Kreiſe, deſſen Mittelpunkt in der Axe liegt.

Bew. (1) erhellt unmittelbar aus der vorſtehenden Erklärung; (2) folgt ebenfalls ſehr leicht; denn wenn man durch die Axe AG (Fig. 66.) und irgend zwei Punkte des Durchſchnitts B und C Ebenen legt, welche die Ebene der Directrix in den Linien GD und GE und die parallele Ebene in den Linien FB und FC, die (nach §. 15) mit GD und GE parallel laufen, durchſchneidet, ſo iſt:

$$FB : GD = AF : AG$$

und $$FC : GE = AF : AG,$$

folglich $$FB : GD = FC : GE,$$

alſo $$FB = FC,$$

weil GD = GE iſt. — Ebenſo haben alle andern Punkte des Durchſchnitts von F gleichen Abſtand; der Durchſchnitt iſt alſo eine Kreislinie und F ihr Mittelpunkt.

Anm. 1. Auch Folgendes iſt leicht zu erweiſen: Wenn man durch einen Punkt der Directrix eine Tangente zieht und durch dieſe und die Spitze eine Ebene legt, ſo berührt die Ebene die Kegelfläche in einer graden Linie.

Anm. 2. Im vorherg. Lehrſatze iſt erwieſen, daß alle mit der Directrix parallelen Ebenen die Kegelfläche in Kreiſen durchſchneiden. Iſt die Axe der Kegelfläche auf der Ebene der Directrix ſenkrecht, ſo gilt dieß von keinen andern Schnitten; iſt aber die Axe gegen die Ebene der Directrix ſchief geneigt, ſo giebt es noch andere unter ſich

parallele Ebenen, welche die Kegelfläche ebenfalls in Kreisen durchschneiden. Iſt nehmlich BDC (Fig. 67.) die Directrix und ABC eine durch die Axe auf BDC senkrecht gelegte Ebene, und wird in derſelben eine Linie EF ſo gezogen, daß ∠AEF = ACB und alſo auch ∠AFE = ABC iſt, und durch EF eine auf der Ebene ABC ſenkrechte Ebene gelegt, ſo iſt ihr Durchſchnitt mit der Kegelfläche ein Kreis.

Denn wenn man in dem Durchſchnitt einen beliebigen Punkt G annimmt und durch dieſen parallel zur Ebene der Directrix eine Ebene KGL legt, welcher die Ebenen ABC und EGF in KL und GH und die Kegelfläche nach dem vorherg. Satze in einem Kreiſe KGLH durchſchneidet, ſo iſt nach §. 143, 1. der Plan.

$$NG.NH = NK.NL,$$

oder da die Ebenen KGL und EGF auf der Ebene ABC, alſo auch die Durchſchnittslinie GH nach §. 29 auf dem Durchmeſſer KL ſenkrecht ſteht, und folglich NG = NH iſt:

$$NG^2 = NK.NL.$$

Ferner iſt aber auch △EKN∽LFN und daher

$$NK:NF = NE:NL \text{ oder } NK.NL = NE.NF,$$

alſo auch $$NG^2 = NE.NF.$$

Demnach liegt der Punkt G auf einer über EF als Durchmeſſer beſchriebenen Kreislinie. Daſſelbe gilt eben ſo von jedem andern Punkte des Durchſchnitts EGFH.

Es iſt klar, daß auch jede andere mit der Ebene EGFH parallele Ebene die Kegelfläche in einem Kreiſe durchſchneidet, und daß die Mittelpunkte dieſer Kreiſe ſämmtlich in einer durch die Spitze A gehenden Linie liegen, die als eine zweite Axe der Kegelfläche angeſehen werden kann.

Es läßt ſich aber auch noch zeigen, daß außer den parallelen Ebenen von der angezeigten Lage keine andere Ebene die Kegelfläche in einer Kreislinie durchſchneidet. — Um dieſes darzuthun, denke man ſich folgende — von der vorhergehenden durchaus unabhängige — Conſtruction ausgeführt: der gegebene kreisförmige Schnitt ſei EGFH (Fig. 67.), eine mit der Directrix parallele Ebene ſchneide denſelben in der Sehne GH, dieſe ſei in dem Punkte N halbirt und durch N (ſenkrecht auf GH) der Durchmeſſer KL in dem Kreiſe KGLH gezogen und endlich durch KL und die Spitze A eine Ebene BAC gelegt, welche die Ebene EGFH in EF durchſchneidet. Wird nun noch irgend ein anderer EGFH durchſchneidender und der Directrix paralleler Kreis gelegt, ſo iſt ſein Durchſchnitt mit der Ebene BAC offenbar ein zu KL paralleler Durchmeſſer, der EF in einem Punkte X durchſchneidet, und der Durchſchnitt mit dem Kreiſe EGFH eine GH parallele beiden Kreiſen gemeinſchaftliche Sehne, die ebenfalls durch den Punkt X geht. Weil aber der Durchmeſſer KL und die Sehne GH auf einander ſenkrecht ſtehen, ſo gilt daſſelbe offenbar

auch von den ihnen parallelen Linien, und folglich ist auch die neue Sehne im Punkte X halbirt. Sind aber N und X die Mitten zweier parallelen Sehnen in dem Kreise EGFH, so liegen dieselben (nach §. 84, 2. der Plan.) in einem auf ihnen senkrechten Durchmesser EF. Demnach ist $\angle ENG = 90^0 = KNG$ und daher die durch beide Aren gehende Ebene BAC auf GH, also auch auf der Ebene RGLH, und daher auch auf der Ebene der Directrix senkrecht. — Weiter ist aber auch

$$GN^2 = NK.NL = NE.NF,$$

folglich

$$NK : NF = NE : NL,$$

daher (nach §. 138, 2. der Plan.) $\triangle EKN \sim LFN$ und $\angle AFE = EKN = ABC$ und $\angle AEF = ACB$.

Anm. 3. Durch das Vorhergehende wird man auch in den Stand gesetzt, die in der Anm. 1 zu §. 84 aufgestellte Behauptung zu erweisen, daß bei der stereographischen Aequatorialprojection die Projectionen der Parallelkreise und der Meridiane wieder Kreise sind. Ist nehmlich zunächst Pp (Fig. 68.) die Erdaxe, POpQ ein auf der Projectionsebene senkrechter größter Kreis, OQ der Durchmesser des Aequators, O der Ort des Auges, BD der Durchmesser eines Parallelkreises, so ist die stereographische Projection dieses Kreises offenbar der Durchschnitt einer Kegelfläche, die ihre Spitze in O und zur Directrix den Parallelkreis hat, mit der Projectionsebene. Nun ist aber $\alpha+\beta+\delta = 90^0$ und auch $\alpha+\beta+\gamma = 90^0$, (weil die zu diesen Peripheriewinkeln gehörigen Bogen DB, BQ, DO zusammen 180^0 betragen), folglich $\gamma = \delta$, und da überdieß die Ebene BOD durch die Axe des Kegels geht und auf der Ebene der Directrix senkrecht steht, so ist nach Anm. 2. der Durchschnitt der Kegelfläche mit der Projectionsebene d. h. die Projection des Parallelkreises eine Kreislinie.

Es sei ferner AEQO (Fig. 69.) der Aequator, (also senkrecht auf der Erdaxe), O der Ort des Auges, AQ der Durchmesser der Projectionsebene, EO der Durchmesser des auf der Projectionsebene senkrechten Meridians und BD der Durchmesser irgend eines abzubildenden Meridians. Denkt man sich durch denselben als Directrix und durch O als Spitze eine Kegelfläche gelegt, so ist der Durchschnitt derselben mit der Projectionsebene offenbar die gesuchte Projection. Weil aber $\delta+\alpha = 90^0 = BOD = \alpha+\beta$, also $\delta = \beta = \gamma$ ist, und die Ebene DOB durch die Axe des Kegels geht und auf der Ebene der Directrix senkrecht steht, so ist der fragliche Durchschnitt ebenfalls eine Kreislinie.

Es versteht sich, daß in beiden vorher betrachteten Fällen in der Zeichnung nicht die ganzen Kreislinien, sondern nur Bogen derselben benutzt werden, und daß die aufgestellten Behauptungen — besonders die zweite — nur in so weit gelten, als die Abweichungen der Erde von der Kugelgestalt unberücksichtigt bleiben.

§. 91. Erklärung.

Ein Körper, welcher von einem Theil der Kegelfläche und einem Kreise begrenzt wird, heißt ein Kegel. Der Kreis heißt die Grundfläche und das Stück der Kegelfläche der Mantel des Kegels. — Der Kegel heißt grade, wenn seine Axe auf der Grundfläche senkrecht steht; im entgegengesetzten Falle heißt er schief.

Durchschneidet man einen Kegel mit einer der Grundfläche parallelen Ebene, so heißt das abgeschnittene Stück, welches zwischen der Grundfläche und der parallelen Ebene liegt, ein abgekürzter Kegel.

Anm. Ein grader Kegel wird erzeugt, wenn man ein rechtwinkliges Dreieck um eine Cathete als Axe herumdreht. Die andere Cathete beschreibt die Grundfläche und die Hypotenuse den Mantel des graden Kegels.

§. 92. Zusatz.

1) Der Mantel des graden Kegels ist einem Dreieck gleich, welches die Seitenlinie zur Höhe und den Umfang der Grundfläche zur Grundlinie hat.

2) Ist daher M der Inhalt des Mantels, f die Seitenlinie, r der Radius der Grundfläche, so ist:

$$M = r\pi f.$$

Bew. 1) Der Mantel des graden Kegels läßt sich in einen Kreisausschnitt aufrollen, der die Seitenlinie zum Radius und die Peripherie der Grundfläche zum Bogen hat. Der Ausschnitt ist aber einem Dreieck gleich, das den Radius (die Seitenlinie) zur Höhe und den Bogen (Umfang der Grundfläche) zur Grundlinie hat.

2) Die Formel für den Inhalt eines Dreiecks ist nach §. 160 der Plan.:

$$J = \frac{gh}{2}.$$

Im vorliegenden Falle ist $J = M$, $g = 2r\pi$ (vermöge §. 178 der Plan.) $h = f$, also

$$M = \frac{2r\pi f}{2} = r\pi f.$$

§. 93. Zusatz.

1) Der Mantel des graden abgekürzten Kegels ist einem Trapez gleich, welches zu den beiden parallelen Seiten die Peripherien der Grundflächen und zur Höhe die Seitenlinie des abgekürzten Kegels hat.

2) Sind daher r und ϱ die Radien der Grundflächen und ist f die Seitenlinie, so ist der Inhalt des Mantels:

$$M = (r+\varrho)\pi f.$$

Bew. Die Behauptung (1) ist vermöge (1) im vorherg. §. an sich klar; daraus folgt sogleich (2); denn nach §. 160 der Plan. ist die Formel für den Inhalt des Trapezes

$$J = \frac{(a+b)}{2}.h,$$

wo a und b die beiden Parallelen und h die Höhe bezeichnet. Hier ist $J = M$, $a = 2r\pi$, $b = 2\varrho\pi$, $h = f$ zu setzen; dadurch verwandelt sich die vorstehende Formel in:

$$M = \frac{(2r\pi+2\varrho\pi)f}{2} = \frac{2\pi(r+\varrho)f}{2} = \pi(r+\varrho)f.$$

Anm. 1. Der Mantel des schiefen Kegels läßt sich auf elementarem Wege nicht berechnen.

Anm. 2. Nennt man zwei Kegel ähnlich, wenn ihre Axen gegen die Grundflächen gleich geneigt sind, und wenn die Axen und Durchmesser dasselbe Verhältniß zu einander haben, so erhält man folgende leicht zu erweisende Sätze:

1) Wenn man einen Kegel durch eine der Grundfläche parallele Ebene durchschneidet, so ist der abgeschnittene kleinere Kegel dem ganzen ähnlich.

2) Die Grundflächen ähnlicher Kegel verhalten sich wie die Quadrate der Höhen.

3) In dem nehmlichen Verhältnisse stehen auch die Mäntel, also auch die ganzen Oberflächen ähnlicher grader Kegel.

(Vergl. die Anm. 1 zu §. 88.)

§. 94. Erklärung.

Zieht man durch einen Punkt einer Kreislinie eine nach beiden Seiten hin unbegrenzte grade Linie so, daß sie die Ebene der Kreislinie durchschneidet, und bewegt dann die grade (Seitenlinie) längs der Kreislinie (Directrix) so fort, daß sie fortwährend ihrer ursprünglichen Lage parallel bleibt, so beschreibt

die grade Linie eine krumme Fläche, welche man eine Cylinderfläche nennt. — Eine Linie durch den Mittelpunkt der Directrix parallel mit der Seitenlinie gezogen, heißt die Axe.

Die Cylinderfläche hat also die Eigenschaft, daß sich überall auf derselben grade Linien ziehen lassen, welche sämmtlich parallel laufen und die Directrix in irgend einem Punkte treffen.

§. 95. Zusatz.

1) Legt man durch zwei Punkte der Directrix eine Ebene mit der Axe parallel, so schneidet sie die Cylinderfläche in zwei der Axe parallelen Linien.

2) Durchschneidet man die Cylinderfläche mit einer der Grundfläche parallelen Ebene, so ist der Durchschnitt ein der Grundfläche gleicher Kreis und sein Mittelpunkt in der Axe.

Bew. Die Richtigkeit von (1) fällt in die Augen; hieraus folgt sehr leicht (2). — Ist nehmlich A (Fig. 70.) ein beliebiger Punkt des Durchschnitts, und wird durch A eine Seitenlinie AB gezogen, welche die Directrix in B schneidet, so ist AB der Axe CD parallel, und die durch AB und CD gelegte Ebene schneidet die Ebene der Directrix und die ihr parallele Ebene in den parallelen Linien BD und AC; demnach ist ABDC ein Parallelogramm, also auch AC = BD, d. h. der Abstand eines jeden beliebigen Punktes des Durchschnitts von C ist dem Radius der Directrix gleich; folglich ist dieser Durchschnitt selbst ein der Directrix gleicher Kreis und C sein Mittelpunkt.

Anm. Ferner ist noch leicht zu zeigen, daß, wenn man an die Directrix eine Tangente zieht und durch diese eine der Axe parallele Ebene legt, die Ebene die Cylinderfläche in einer graden Linie berührt, und daß die in der Anm. 2 zu §. 90 über die Kegelfläche aufgestellten Behauptungen in ganz ähnlicher Art auch von der Cylinderfläche gelten.

§. 96. Erklärung.

Ein Körper, welcher von zwei parallelen und congruenten Kreisen (Grundflächen) und dem zwischenliegenden Stück der Cylinderfläche (Mantel) begrenzt wird, heißt ein Cylinder (Walze, Welle). — Er heißt grade, wenn die Axe auf der Grundfläche senkrecht steht, sonst schief.

Anm. Ein grader Cylinder entsteht, wenn ein Rechteck um eine Seite gedreht wird; die gegenüberliegende Seite beschreibt den Mantel, und die beiden andern Seiten beschreiben die Grundflächen des graden Cylinders.

§. 97. Zusatz.

1) Der Mantel des graden Cylinders ist einem Rechteck gleich, welches die Peripherie der Grundfläche zur Grundlinie und die Höhe des Cylinders zur Höhe hat.

2) Ist daher r der Radius, h die Höhe des Cylinders, so ist der Inhalt des Mantels

$$M = 2r\pi h$$

Beweis zu (2). Denn das Rechteck hat zur Höhe h und zur Grundlinie die Peripherie $2r\pi$ (§. 178 der Plan.)

Anm. 1. Der Mantel des schiefen Cylinders läßt sich ebenso, wie der Mantel des schiefen Kegels, nur mit Hülfe der höhern Mathematik berechnen.

Anm. 2. Nennt man zwei Cylinder ähnlich, wenn ihre Axen gegen die Grundflächen gleich geneigt sind und wenn sich die Axen wie die Durchmesser verhalten, so ergiebt sich noch leicht Folgendes: Die Grundflächen ähnlicher Cylinder verhalten sich, wie die Quadrate der Höhen. — In demselben Verhältniß stehen auch die Mäntel und also auch die ganzen Oberflächen, wenn die ähnlichen Cylinder grade sind.

§. 98. Erklärung.

Ein Körper, dessen krumme Grenzfläche von einem innern Punkte überall gleich weit absteht, heißt eine **Kugel**. — **Mittelpunkt** — **Radius** — **Durchmesser**.

§. 99. Zusatz.

Ein Punkt liegt innerhalb oder außerhalb oder grade auf der Kugelfläche, je nachdem sein Abstand vom Mittelpunkt kleiner, größer oder ebenso groß ist, als der Radius.

§. 100. Zusatz.

1) Eine Linie schneidet die Kugelfläche, berührt dieselbe oder trifft sie gar nicht, je nachdem ihr Abstand vom Mittelpunkt kleiner, als der Radius, oder ebenso groß, oder größer ist.

2) Dasselbe gilt ebenso von einer Ebene.

Der Beweis ist ganz der nehmliche, wie für die ähnlich lautenden Behauptungen über den Kreis in §. 86 u. 90 d. Plan.

§. 101. Lehrsatz.

Der Durchschnitt einer Ebene mit der Kugelfläche ist ein Kreis. — Geht die Ebene durch den Mittelpunkt der Kugel, so ist dieser auch Mittelpunkt des Kreises; geht aber die Ebene des Durchschnitts nicht durch den Kugelmittelpunkt, so liegt der Mittelpunkt des Kreises in dem Fußpunkt des aus dem Mittelpunkt der Kugel auf die Durchschnittsebene gefällten Lothes.

Bew. Wenn die Durchschnittsebene durch den Kugelmittelpunkt geht, fällt die Richtigkeit des Satzes in die Augen. — Im andern Fall sei M der Mittelpunkt der Kugel (Fig. 71.), MC das Loth auf die Durchschnittsebene, A und B seien zwei beliebige Punkte des Durchschnitts und nach denselben die Radien MA und MB gezogen. Dann stimmen die rechtwinkeligen Dreiecke MCA und MCB in den Hypotenusen MA und MB und der gemeinschaftlichen Cathete MC überein, folglich ist auch die andere Cathete CA = CB. Ebenso folgt, daß alle andern Punkte des Durchschnitts von C gleichen Abstand haben; der Durchschnitt ist folglich ein Kreis und C sein Mittelpunkt.

§. 102. Zusatz.

1) Die Linie, welche den Kugelmittelpunkt mit dem Mittelpunkt eines Kugelkreises (eines Kreises, dessen Peripherie in der Kugelfläche liegt) verbindet, steht senkrecht auf der Ebene des Kugelkreises.

2) Ein Loth auf der Ebene eines Kugelkreises in seinem Mittelpunkt errichtet, geht durch den Kugelmittelpunkt.

Bew. Beide Behauptungen sind unmittelbare Folgerungen aus dem vorherg. §.

§. 103. Zusatz.

1) Kreise, deren Mittelpunkte im Mittelpunkt der Kugel liegen, sind größer, als alle andern Kugelkreise, und heißen

größte oder Hauptkreise; die andern nennt man kleinere oder Nebenkreise.

2) Kugelkreise sind gleich, wenn ihre Ebenen gleich weit vom Mittelpunkt der Kugel abstehen; sie werden um so kleiner, je weiter sich ihre Ebenen vom Mittelpunkt der Kugel entfernen.

Die Beweise sind ganz dieselben, wie für die ähnlich lautenden Sätze über die Sehne in der Plan. (§. 83, 3. u. §. 85).

§. 104. Lehrsatz.

Durch vier Punkte, welche nicht in einer Ebene liegen, läßt sich allemal eine und auch nur eine einzige Kugelfläche legen.

Bew. Die gegebenen vier Punkte seien A, B, C, D (Fig. 72.); — lege durch A, B, C und durch B, C, D eine Ebene, beschreibe in der ersten einen Kreis durch die Punkte A, B, C und ebenso in der zweiten durch B, C, D; halbire die beiden gemeinschaftliche Sehne BC in E, verbinde diesen Punkt mit den Mittelpunkten F und G der beiden Kreise, lege durch F, E, G eine Ebene und ziehe in derselben FH ⊥ EF und GH ⊥ EG; — dann ist der Durchschnittspunkt H dieser beiden Lothe der Mittelpunkt der gesuchten Kugel. —

Denn nach der Construction ist die Kante BC ⊥ FE und EG, daher auch nach §. 31 Ebene ABC und BCD ⊥ HFEG; und da HF und HG in der senkrechten Ebene HFEG senkrecht auf die Kanten FE und EG gezogen sind, so sind sie auch (nach §. 34, 3.) auf den Ebenen ABC und BCD senkrecht. Nun ist △AFH ≅ BFH ≅ CFH, (weil HF = HF = HF, AF = BF = CF, ∠AFH = BFH = CFH ist), folglich ist auch HA = HB = HC. Ebenso ist △BGH oder CGH ≅ DGH und daher HB oder HC = HD. Demnach geht eine mit einer der vier gleichen Linien HA, HB, HC oder HD aus dem Mittelpunkte H beschriebene Kugelfläche durch die vier Punkte A, B, C und D.

Eine zweite Kugelfläche läßt sich aber durch diese vier Punkte nicht legen, weil der Mittelpunkt derselben (vermöge §. 102, 2.) in jedem der beiden Lothe HF und HG, also in ihrem Durchschnittspunkte H liegen muß.

Anm. Ueber Kugeln, welche sich schneiden oder berühren, gelten im Wesentlichen dieselben Bestimmungen, wie von Kreisen in der Planimetrie. (§. 111—117.)

§. 105. Erklärung.

Der Kugeldurchmesser, welcher auf der Ebene eines Kugelkreises senkrecht steht, (und also vermöge §. 101 durch den Mittelpunkt desselben geht,) heißt die Axe, und seine Endpunkte heißen die Pole des Kugelkreises.

§. 106. Zusatz.

1) Parallele Kugelkreise haben einerlei Axe und Pole.

2) Legt man durch die Pole paralleler Kugelkreise Hauptkreise, so schneiden diese von den Parallelkreisen ähnliche Bogen ab.

3) Die Bogen dieser Hauptkreise, welche zwischen einem Pole und einem Parallelkreise enthalten sind, sind gleich.

Bew. 1) Der Durchmesser, welcher auf dem einen Parallelkreise senkrecht ist, ist auch auf allen andern senkrecht und daher die gemeinschaftliche Axe sämmtlicher Parallelkreise.

2) Die Centriwinkel ACB und DEF (Fig. 73.) sind gleich, weil ihre Schenkel parallel laufen; es haben daher auch die Bogen AB und DF zu ihren Peripherien einerlei Verhältniß.

3) Da $PC = PC$, $\angle PCA = PCB$, $CA = CB$ ist, so ist $\triangle PCA \cong PCB$, folglich $PA = PB$, und da in congruenten Kreisen zu gleichen Sehnen auch gleiche Bogen gehören, so ist auch Bogen $PA = PB$.

§. 107. Erklärung.

Dasjenige Stück der Kugeloberfläche, welches zwischen den halben Peripherien zweier Hauptkreise enthalten ist, heißt ein sphärisches Zweieck oder ein sphärischer Winkel.

Die Ebenen der beiden Kreise schließen auf der Seite des sphärischen Winkels einen Flächenwinkel ein, welcher der zum sphärischen Winkel gehörige Flächenwinkel, so wie sein Linienwinkel der zugehörige Linienwinkel genannt wird.

Da ſich ſphäriſche Winkel offenbar wie ihre Linienwinkel verhalten, ſo unterſcheidet man auch rechte, ſtumpfe, ſpitze ſphäriſche Winkel u. dgl. und theilt den rechten ſphäriſchen Winkel ebenfalls in 90 Grad u. ſ. f. — Es laſſen ſich daher in der Rechnung die Maaße (Zahlenwerthe) der ſphäriſchen Winkel allemal mit den Maaßen der zugehörigen Flächenwinkel oder Linienwinkel vertauſchen.

§. 108. Erklärung.

Ein Stück der Kugelfläche, welches von drei oder mehr Bogen von Hauptkreiſen begrenzt wird, heißt ein ſphäriſches Vieleck. Die begrenzenden Bogen werden die Seiten und die ſphäriſchen Winkel, unter denen dieſe Bogen (auf der Seite, auf welcher das Vieleck liegt,) zuſammenſtoßen, die Winkel des Vielecks genannt.

Im Folgenden ſollen nur ſolche Vielecke (vorzüglich Dreiecke) betrachtet werden, deren Seiten und Winkel kleiner, als 180° ſind.

§. 109. Zuſatz.

Die Ebenen der Bogen, welche ein ſphäriſches Dreieck begrenzen, ſchließen am Mittelpunkt der Kugel ein körperliches Dreieck ein, deſſen Seiten und Winkel in der Anzahl ihrer Grade mit den Seiten und Winkeln des ſphäriſchen Dreiecks genau übereinſtimmen. Es gelten daher die oben von körperlichen Dreiecken erwieſenen Sätze, §. 56 bis 74, ohne Ausnahme auch von ſphäriſchen Dreiecken.

§. 110. Zuſatz.

Der Bogen eines Hauptkreiſes, welcher zwei Punkte auf der Kugeloberfläche verbindet und kleiner, als die halbe Peripherie iſt, iſt die kürzeſte Linie, welche ſich auf der Kugeloberfläche zwiſchen den beiden Punkten ziehen läßt.

Bew. Denkt man ſich zunächſt die beiden Punkte durch eine gebrochene Linie verbunden, deren einzelne Stücke ſämmtlich Bogen von Hauptkreiſen ſind, ſo folgt aus dem Satze, daß zwei Seiten eines Dreiecks zuſammen größer ſind, als die dritte,

ebenſo wie in der Planimetrie (§. 49 Anm. 2), daß die gebrochene Linie größer iſt, als der gegebene Bogen. — Sind aber die beiden Punkte durch irgend eine andere zuſammenhängende krumme Linie verbunden, ſo wird man dieſe allemal als aus unendlich vielen Bogen von Hauptkreiſen zuſammengeſetzt anſehen können, und ſie iſt daher ebenfalls größer, als der Bogen des Hauptkreiſes, der jene beiden Punkte verbindet.

Anm. Ein Leſer, dem der vorſtehende Beweis, der allerdings nicht für ganz ſtreng gelten kann, nicht genügen ſollte, kann den Satz ohne alle Störung des Zuſammenhangs überſchlagen.

§. 111. Lehrſatz.

Symmetriſche ſphäriſche Dreiecke haben gleichen Flächeninhalt.

Bew. 1. Es läßt ſich kein Grund angeben, warum das eine größer ſein ſollte, als das andere.

Bew. 2. Die gegebenen Dreiecke ſeien ABC und abc (Fig. 74.); — bilde das zu ABC gehörige körperliche Dreieck am Mittelpunkte M und verlängere die Kanten deſſelben, bis ſie die Oberfläche der Kugel zum zweiten Male in den Punkten α, β, γ treffen. Dann beſtimmen dieſe drei Punkte ein neues ſphäriſches Dreieck $\alpha\beta\gamma$, welches dem Dreieck abc congruent iſt. Man denke ſich ferner durch die drei Punkte A, B, C eine Ebene gelegt und in dieſer durch die genannten drei Punkte eine Kreislinie gezogen. Sind nun P und π die Pole dieſes Kugelkreiſes und wird P mit den Punkten A, B, C, π mit α, β, γ durch Bogen von Hauptkreiſen verbunden, ſo ſind zunächſt (nach §. 106, 3.) die Bogen PA, PB, PC einander gleich; ferner iſt aber auch $PA = \pi\alpha$, $PB = \pi\beta$, $PC = \pi\gamma$, da die zugehörigen Centriwinkel bei M Scheitelwinkel ſind. Demnach iſt auch $\pi\alpha = \pi\beta = \pi\gamma$. Nun ſtimmen die beiden Dreiecke ABP und $\alpha\beta\pi$ in allen Seiten und Winkeln überein, — denn die zugehörigen körperlichen Dreiecke ſind Scheiteldreiecke, — und da die Dreiecke ABP und $\alpha\beta\pi$ zugleich gleichſchenkelig ſind, ſo ſind ſie auch (nach §. 67) congruent. — Aus denſelben Gründen iſt $\triangle ACP \cong \alpha\gamma\pi$ und $\triangle BCP \cong \beta\gamma\pi$, folglich auch $\triangle ABC = \alpha\beta\gamma = abc$.

In der Figur sind die Punkte P und x innerhalb der Dreiecke ABC und $\alpha\beta\gamma$ verzeichnet; man sieht indeß äußerst leicht, daß der Beweis sich nicht wesentlich ändert, wenn jene Punkte in eine Seite oder außerhalb der Dreiecke fallen. Im letztern Fall würde man von der Summe zweier gleichschenkeligen Dreiecke das dritte (oder dieses von jener Summe) subtrahiren.

§. 112. Lehrsatz.

Jedes sphärische Dreieck verhält sich zur halben Kugeloberfläche, wie der Ueberschuß seiner Winkelsumme über 180° sich zu 360° verhält.

Bew. Die Winkel des gegebenen Dreiecks ABC (Fig. 75.) seien in Graden ausgedrückt durch $\alpha(=A)$, $\beta(=B)$, $\gamma(=C)$, die Fläche des Dreiecks selbst sei mit a und die halbe Kugelfläche mit O bezeichnet. Da sich nun ein sphärisches Zweieck zur halben Kugelfläche offenbar wie die Zahl seiner Grade zu 180 verhält, so ist

$$a+b : O = \beta : 180$$

und

$$a+c : O = \alpha : 180.$$

Ferner ist aber auch:

$$a+d : O = \gamma : 180;$$

denn das Dreieck d ist seinem Scheiteldreieck gleich, und dieses bildet mit a ein sphärisches Zweieck, für welches γ die Zahl der Grade bezeichnet. — Aus den obigen Proportionen folgt:

$$a+b = \frac{\beta}{180} \cdot O,$$

$$a+c = \frac{\alpha}{180} \cdot O,$$

$$a+d = \frac{\gamma}{180} \cdot O,$$

und hieraus durch Addition:

$$3a+b+c+d = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{180} \cdot O,$$

oder da $a+b+c+d = O$ ist:

$$2a+O = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{180} \cdot O,$$

also, wenn man beiderseits $O = \frac{180}{180} . O$ subtrahirt:

$$2a = \frac{\alpha+\beta+\gamma-180}{180} . O$$

und $$a = \frac{\alpha+\beta+\gamma-180}{360} . O$$

oder $$a : O = (\alpha+\beta+\gamma-180) : 360.$$

§. 113. Zusatz.

Man sieht nun auch leicht ein, wie das Verhältniß der Fläche eines beliebigen sphärischen Vielecks zur halben Kugelfläche durch seine Winkelsumme bestimmt wird. Hat das Vieleck V, dessen Winkelsumme S sein mag, n Seiten, so läßt sich dasselbe durch Diagonalen aus einer Ecke nach den übrigen Ecken gezogen in n—2 Dreiecke theilen. Diese seien A, B, C.... L und ihre Winkelsummen beziehlich α, β, γ... λ. Dann ist nach dem vorherg. §.

$$A = \frac{\alpha-180}{360} . O,$$

$$B = \frac{\beta-180}{360} . O,$$

$$C = \frac{\gamma-180}{360} . O,$$

. . . . . .

. . . . . .

$$L = \frac{\lambda-180}{360} . O,$$

folglich:

$$(A+B+C...+L) = \frac{(\alpha+\beta+\gamma...+\lambda)-(n-2).180}{360} . O,$$

oder da $A+B+C...+L = V$ und $\alpha+\beta+\gamma...+\lambda = S$ ist:

$$V = \frac{S-(n-2)180}{360} . O.$$

Bemerk. Da die Kugel durch Umdrehung eines Halbkreises um seinen Durchmesser als Achse erzeugt und die Peripherie dieses Halbkreises als die Summe unendlich vieler unendlich kleiner Sehnen angesehen werden kann, so hat man, um zu einem

Ausdruck für den Inhalt der Kugelfläche zu gelangen, vorher die von einer Sehne bei der angegebenen Umdrehung beschriebene krumme Fläche näher zu betrachten.

§. 114. Lehrsatz.

Wenn man einen Halbkreis um seinen Durchmesser als Achse herumdreht, so beschreibt eine in dem Halbkreise gezogene Sehne (AB in Fig. 76.) im Allgemeinen den Mantel eines abgekürzten graden Kegels; dieser Kegelmantel ist an Inhalt einem Cylindermantel gleich, der zur Höhe die Höhe des abgekürzten Kegels (DE) und zum Radius den Abstand der Sehne vom Mittelpunkte (CF) hat.

Bew. Nach §. 93 ist der von der Sehne AB beschriebene abgekürzte Kegelmantel

$$M = (AD+BE).\pi.AB.$$

Wenn man nun AB in F halbirt und $FG \parallel EB$ zieht, so ist (nach §. 186, 4. d. Plan.) $AD+BE = 2FG$, also

$$M = 2FG.\pi.AB.$$

Verbindet man ferner noch F mit C und zieht $FH \perp EB$, so ist $\triangle HFB \sim GFC$, weil $\angle FHB = FGC = 90°$ und $\angle HFB = GFC$ ist, indem beide den Winkel CFH zum Rechten ergänzen. Demnach verhält sich:

$$FB : FH = FC : FG,$$

oder da FB und FH die Hälften von AB und DE sind:

$$AB : DE = FC : FG,$$

woraus

$$AB.FG = DE.FC$$

folgt. Hiernach verwandelt sich der obige Ausdruck für M in

$$M = 2DE.FC.\pi.$$

Dieser Ausdruck kann aber (nach §. 97) für den Inhalt eines Cylindermantels mit der Höhe DE und dem Radius FC gelten.

Dieß findet auch dann noch statt, wenn ein Endpunkt der Sehne in den einen Endpunkt des Durchmessers fällt, oder wenn die Sehne dem Durchmesser parallel ist. Im ersten Fall beschreibt die Sehne einen vollständigen Kegelmantel; der vorhergehende Beweis kann aber ohne alle weitere Veränderung, als daß die

Punkte A und D jetzt in einen zusammenfallen, betrachten werden. Im letzten Fall wird durch die Bewegung der Sehne unmittelbar der angegebene Cylindermantel erzeugt.

§. 115. Lehrsatz.

Die Kugeloberfläche ist einem Cylindermantel gleich, welcher den Kugeldurchmesser zum Durchmesser und zur Höhe hat.

Bew. Theilt man die halbe Peripherie eines Hauptkreises in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, verbindet die auf einander folgenden Theilungspunkte (Fig. 77.) und bezeichnet den Abstand der entstandenen Sehnen vom Mittelpunkte mit ϱ, so hat man für die von diesen Sehnen AB, BD, DE, EF und FG bei der Umdrehung um AG beschriebenen krummen Flächen nach der Reihe die Ausdrücke:

$$2Ab.\varrho\pi,\ 2bd.\varrho\pi,\ 2de.\varrho\pi,\ 2ef.\varrho\pi,\ 2fG.\varrho\pi,$$

also für die Summe aller:

$$S = 2\varrho\pi(Ab + bd + de + ef + fG).$$

oder $$S = 2\varrho\pi . AG = 2\varrho\pi . 2r,$$

wenn man den Durchmesser der Kugel $AG = 2r$ setzt.

Nun wird man offenbar — dadurch, daß man die Peripherie des Halbkreises in mehr und mehr gleiche Theile theilt, — den Abstand ϱ der Sehne vom Mittelpunkt dem Radius r, die von den Sehnen gebildete gebrochene Linie der halben Peripherie und die Summe der krummen Flächen, welche die einzelnen Sehnen beschreiben, der Kugelfläche immer näher und beliebig nahe bringen können, und es wird folglich der Inhalt der Kugeloberfläche O erhalten werden, wenn man in dem obigen Ausdruck für S an die Stelle von ϱ den Radius r setzt. Dann ergiebt sich

$$O = 2r\pi . 2r,$$

ein Ausdruck, welcher (nach §. 97) für den Inhalt eines Cylindermantels gelten kann, der 2r sowohl zur Höhe, als auch zum Durchmesser hat.

§. 116. Zusatz.

Die Formel des vorherg. §.:

$$O = 2r\pi . 2r = 4r^2\pi$$

läßt sich auch dahin aussprechen: die Kugeloberfläche ist viermal so groß, als ein Hauptkreis; — denn der Inhalt des Hauptkreises, der natürlich zum Radius r hat, ist bekanntlich $r^2\pi$ (§. 179 der Plan.). — Bei einer Halbkugel ist daher die krumme Fläche grade das Doppelte von der ebenen.

§. 117. Erklärung.

Ein Stück der Kugelfläche, welches von der Peripherie eines Kugelkreises begrenzt wird, heißt eine Calotte (Haube), und ein Stück der Kugelfläche, welches zwischen zwei parallelen Kugelkreisen liegt, heißt eine Zone (Gürtel).

§. 118. Zusatz.

Die Calotte oder Zone ist einem Cylindermantel gleich, der zum Durchmesser den Durchmesser der Kugel, und zur Höhe die Höhe der Calotte oder Zone hat.

Der Beweis ist dem von §. 115 ganz ähnlich. Man wird sich nehmlich den Bogen, durch dessen Umdrehung die Calotte oder Zone beschrieben werden kann, in eine beliebige Anzahl gleicher Theile getheilt und die auf einander folgenden Theilungspunkte durch Sehnen verbunden denken u. s. f.

§. 119. Zusatz.

Ist r der Radius der Kugel, h die Höhe der Calotte oder Zone, so ist ihr Flächeninhalt

$$= 2r\pi . h.$$

Bew. Denn $2r\pi$ ist der Umfang und h die Höhe des der Calotte oder Zone gleichen Cylindermantels.

Anm. Auch die folgende Beziehung ist merkenswerth: Die von dem Bogen AB (Fig. 77.) beschriebene Calotte ist nach dem vorherg. §. $= AG . \pi . Ah = AG . Ah . \pi = AB^2 . \pi$, d. h. die Calotte ist einem Kreise gleich, welcher die Sehne AB zum Radius hat. So ist insbesondere die halbe Kugelfläche einem Kreise gleich, der zum Radius die Sehne eines Bogens von 90^0 hat, und die ganze Kugelfläche einem Kreise gleich, der den Kugeldurchmesser zum Radius hat.

C. Von der Ausmessung der eckigen und runden Körper.

§. 120. Erklärung.

Zwei Körper sind congruent, wenn sie so zusammengelegt werden können, daß ihre Grenzen sich decken. — Zwei Körper sind gleich, wenn sie sich in dieselben congruenten Stücke zerschneiden lassen, also auch, wenn in beiden der nehmliche dritte Körper gleich vielmal enthalten ist.

§. 121. Lehrsatz.

1) Grade Prismen mit congruenter Grundfläche und gleicher Höhe sind congruent.

2) Grade Prismen mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe sind gleich.

Bew. Die Behauptung (1) springt als richtig in die Augen. — (2) folgt aber aus (1) äußerst leicht; denn wenn die Grundflächen gleich sind, so müssen sie sich in dieselben congruenten Stücke zerschneiden lassen. Legt man nun durch die Zerschneidungslinien Ebenen senkrecht auf die Grundflächen, so werden hierdurch die gegebenen Prismen in Stücke zerschnitten, die nach (1) congruent sind; also sind die gegebenen Prismen gleich.

§. 122. Lehrsatz.

Grade Prismen mit gleicher Grundfläche verhalten sich wie ihre Höhen.

Bew. Es sei ABC = EFGH (Fig. 78.) und es verhalte sich

$$AD : EK = 3 : 5.$$

Theilt man nun AD in drei und EK in fünf gleiche Theile und legt durch die Theilungspunkte Ebenen den Grundflächen parallel, so wird das Prisma P in drei und Q in fünf Theile getheilt, die alle (nach (2) des vorherg. §.) unter sich gleich sind. Demnach ist:

$$P : Q = 3 : 5 = AD : EK.$$

Anm. Vergl. die Anm. zu §. 42.

§. 123. Erklärung.

Wenn man einen Körper durch einen andern, als Einheit angenommenen Körper gemeſſen hat, und dann den auszumeſſenden Körper (ſeiner Größe nach) als benannte Zahl ausdrückt, ſo heißt dieſe benannte Zahl der Inhalt des Körpers. — Als Einheit wird gewöhnlich ein Würfel angenommen.

Wenn im Folgenden aus den Maaßen gewiſſer gegebenen Linien oder Flächen der Inhalt eines Körpers berechnet werden ſoll, ſo iſt allemal vorausgeſetzt, daß die Linien durch die Kante des Würfels als Längeneinheit und die Flächen durch die Seitenfläche des Würfels als Flächeneinheit gemeſſen ſind, und daß ſich alſo die gegebenen Maaße auf dieſe Einheiten beziehen.

Anm. Zu den am häufigſten Anwendung findenden Gemäßen gehören folgende:

1 Kubikfuß = 1728 Kubikzoll.
1 Kubikzoll = 1728 Kubiklinien.
1 Kubikklafter = 108 Kubikfuß, (ein Körper von 6′ Höhe, 6′ Länge und 3′ Breite).
1 Schachtruthe = 144 Kubikfuß, (ein Körper von 12′ Länge, 12′ Breite und 1′ Höhe).
1 Scheffel = $^{16}/_{9}$ Kubikfuß = 3072 Kubikzoll.
1 Metze = $^{1}/_{16}$ Scheffel = $^{1}/_{9}$ Kubikfuß = 192 Kubikzoll.
1 Quart oder Kanne = $^{1}/_{3}$ Metze = $^{1}/_{27}$ Kubikfuß = 64 Kubikzoll (= einem Würfel von 4 Zoll Höhe).

§. 124. Lehrſatz.

Die Zahl für den Inhalt eines rechtwinkligen Parallelepipedums wird gefunden, wenn man die Maaße dreier in einen Punkt zuſammenſtoßenden Kanten — (Länge, Breite und Höhe) — in einander multiplicirt.

Bew. Das auszumeſſende Parallelepipedum ſei P (Fig. 79.), der als Einheit angenommene Würfel W; die Maaße dreier zuſammenſtoßenden Kanten des Parallelepipedums AB, AC, AD ſeien beziehlich a, b, c; — mache AF = AG = AH = der Seite des Würfels und lege durch F eine der Grundfläche CD, durch G eine der Seitenfläche BD und durch H eine der Seitenfläche BC parallele Ebene; dann entſtehen drei neue Pa-

rallelepipeda AL, AM und AN. — Nun haben die Parallelepipeda AE und AL dieselbe Grundfläche ADOC; sie verhalten sich daher (vermöge §. 122) wie ihre Höhen; also ist

1) AE:AL = AB:AF = a:1.

Die Parallelepipeda AL und AM haben ebenfalls eine Fläche ADQF gemeinschaftlich, und wenn man diese als Grundfläche annimmt, sind die zugehörigen Höhen AC und AG; es verhält sich folglich

2) AL:AM = AC:AG = b:1.

Endlich kann man AGRF als gemeinschaftliche Grundfläche der Parallelepipeda AM und AN und AD und AH als die zugehörigen Höhen ansehen; dann erhält man die Proportion

3) AM:AN = AD:AH = c:1.

Aus den drei vorherg. Gleichungen folgt nach der Reihe:

1) AE = a.AL,
2) AL = b.AM,
3) AM = c.AN,

woraus offenbar

AE = a.b.c.AN

hervorgeht, oder was dasselbe ist:

P = a.b.c.W,

d. h. der Würfel ist in dem Parallelepipedum a.b.c mal enthalten, und wenn man die Zahl für den Inhalt des Parallelepipedums mit J bezeichnet, so ist folglich

J = a.b.c.

Anm. Ist a = 5, b = 3, c = 4, so ist:

AE = 5AL,
AL = 3AM,
und AM = 4AN,
folglich AE = 5.3.4AN = 60AN,

also ist die Zahl des Inhalts J = 60. —

Bemerk. Den vorhergehenden Satz spricht man gewöhnlich kurz so aus: „Der Inhalt eines rechtwinkligen Parallelepipedums ist gleich dem Product dreier zusammenstoßenden Kanten.“ — Aehnlicher Abkürzungen wird man sich auch in den folgenden Sätzen bedienen.

§. 125. Zusatz.

Der Inhalt eines Würfels, welcher die Kante a hat, ist

$$J = a.a.a = a^3.$$

Anm. Diese Beziehung ist Veranlassung geworden, eine jede dritte Potenz einen Kubus zu nennen. Es drückt nehmlich, wie man so eben gesehen hat, die dritte Potenz einer Zahl den Inhalt eines Würfels aus, dessen Seite die gegebene Zahl zum Maaße hat.

§. 126. Zusatz.

1) Nach §. 124 ist der Inhalt eines rechtwinkligen Parallelepipedums $J = a.b.c = a.(b.c)$, und da b.c offenbar den Inhalt der Grundfläche ausdrückt, so kann man auch jenen Satz dahin aussprechen: Der Inhalt eines rechtwinkligen Parallelepipedums ist gleich dem Product aus Höhe und Grundfläche. — Hieraus folgt:

2) Der Inhalt eines jeden graden Prisma's ist gleich dem Product aus Höhe und Grundfläche.

Denn das grade Prisma ist (nach §. 121, 2.) einem rechtwinkligen Parallelepipedum gleich, das mit ihm gleiche Höhe und Grundfläche hat, und für das rechtwinklige Parallelepipedum ist der Satz so eben erwiesen.

§. 127. Lehrsatz.

Jedes schiefe Prisma ist einem graden Prisma gleich, welches den senkrechten Durchschnitt der Seitenflächen zur Grundfläche und die Seitenkante des schiefen Prisma's zur Höhe hat.

Bew. Nimm in einer Kante des schiefen Prisma ABCDEF (Fig. 80.) einen beliebigen Punkt G an und lege durch diesen eine Ebene GHK senkrecht auf die Kanten, mache GL = AD und lege durch L eine mit GHK parallele und daher die erweiterten Seitenflächen senkrecht durchschneidende Ebene LMN, — so ist GHKLMN ein grades Prisma und gleich dem schiefen Prisma ABCDEF. — Es ist nehmlich zunächst der Körper LMNDEF (γ) $\cong$ GHKABC (α); denn da LG = DA gemacht und also auch NK = FC und MH = EB ist, so ist auch LD = GA, NF = KC und ME = HB; und (nach §. 84) ist

Dreieck LMN $\cong$ GHK; legt man nun die Körper γ und α so zusammen, daß die Dreiecke LMN und GHK sich decken, so fallen auch die auf den Ebenen LMN und GHK senkrechten Kanten LD und GA, NF und KC, ME und HB zusammen; und da diese Kanten einander gleich sind, so kommen auch die Endpunkte D, E, F auf A, B, C zu liegen, und es fällt folglich die Ebene DEF mit ABC zusammen. Demnach ist $\gamma \cong \alpha$, folglich auch $\gamma + \beta = \alpha + \beta$, das heißt: Das grade Prisma GHKLMN ist gleich dem schiefen Prisma ABCDEF.

§. 128. Lehrsatz.

In dem schiefen und graden Prisma des vorherg. §. verhalten sich die Grundflächen umgekehrt wie die Höhen.

Bew. Das Dreieck GHK (Fig. 80.) kann als die Projection des Dreiecks ABC auf die Ebene SRT angesehen werden, welche die Ebene des Dreiecks ABC in der Kante RS durchschneidet. Zieht man nun aus D auf die Ebene SRU das Loth DP und legt durch dieses und DA eine Ebene, welche die Ebene SRU in AQ und die Ebene SRT in GQ durchschneidet, so steht diese Ebene sowohl auf der Ebene SRU, als auch auf SRT und folglich auch auf der Kante RS senkrecht; demnach ist die Kante RS auf den beiden Durchschnittslinien AQ und GQ senkrecht, und wenn man SRT als Grundebene und AQ als Länge der schiefen Ebene SRU annimmt, so ist folglich GQ die zugehörige Basis. Nach §. 53 verhält sich eine Figur in einer schiefen Ebene zu ihrer Projection wie die Länge der schiefen Ebene zur Basis, also im vorliegenden Falle

$$\triangle ABC : GHK = AQ : GQ.$$

Weil aber die rechtwinkeligen Dreiecke AGQ und APD, da sie den Winkel bei A gemeinschaftlich haben, ähnlich sind, so ist:

$$AQ : GQ = AD : DP;$$

folglich verhält sich auch:

$$\triangle ABC : GHK = AD : DP,$$

oder wenn man AD durch LG ersetzt:

$$\triangle ABC : GHK = LG : DP,$$

d. h. die Grundfläche des schiefen Prisma verhält sich zur Grundfläche des graden wie die Höhe des graden zur Höhe des schiefen Prisma.

§. 129. Lehrsatz.

Der Inhalt eines jeden (graden oder) schiefen Prisma ist gleich dem Product aus Höhe und Grundfläche.

Bew. Der Inhalt des schiefen Prisma ABCDEF (Fig. 80.) sei S, der Inhalt des ihm gleichen graden Prisma GHKLMN sei G. Nach §. 126, 2. ist der Inhalt des graden Prisma gleich dem Product aus Höhe und Grundfläche, also

$$G = \triangle GHK . LG.$$

Nach dem vorherg. §. ist

$$\triangle ABC : GHK = LG : DP,$$

folglich nach einem bekannten arithmetischen Satze:

$$\triangle GHK , LG = \triangle ABC . DP,$$

also auch $$G = \triangle ABC . DP,$$

oder da $S = G$ ist:

$$S = \triangle ABC . DP,$$

d. h. der Inhalt des schiefen Prisma ist gleich dem Product aus der Grundfläche ABC und der Höhe DP.

Bemerk. In den Beweisen der drei vorherg. §§. stellt die Zeichnung ein dreiseitiges Prisma dar; die Beweise sind indeß, wie man leicht erkennen wird, so geführt, daß sie für jedes beliebige vielseitige Prisma gelten, und nur um möglichster Einfachheit der Darstellung willen ist das dreiseitige Prisma in der Zeichnung zu Grunde gelegt. — Ueberdieß erhellt die Allgemeingültigkeit jener Sätze auch leicht daraus, daß sich jedes mehrseitige Prisma in dreiseitige zerschneiden läßt.

§. 130. Zusatz.

Aus dem vorherg. §. folgt unmittelbar:

1) Prismen (sowohl schiefe, als grade) sind gleich, wenn sie gleiche Höhe und Grundflächen haben.

2) Prismen mit gleichen Grundflächen verhalten sich wie ihre Höhen, und

3) Prismen mit gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundflächen.

4) Ueberhaupt verhalten sich Prismen wie die Producte aus Höhe und Grundfläche.

§. 131. Zusatz.

Das Parallelepipedum wird durch die Diagonalebene halbirt.

Bew. Die dreiseitigen Prismen ABDEFH und BCDFGH (Fig. 81.) sind gleich, weil sie in Höhe und Grundfläche übereinstimmen.

Anm. Die Prismen des vorherg. §. stimmen zwar in ihren Grenzen vollkommen überein, sie sind aber darum — wenn sie schief sind — nicht nothwendig congruent, wie sich der Anfänger ziemlich leicht überzeugen wird, wenn er in Gedanken den Versuch macht, jene Prismen in einander zu legen. — Für Schwächere wird der Anblick von Modellen nicht überflüssig sein.

§. 132. Lehrsatz.

Der Inhalt eines Cylinders ist dem Product aus Höhe und Grundfläche gleich.

Bew. Der Cylinder kann als ein Prisma von unendlich vielen Seiten angesehen werden; und von Prismen gilt der Satz nach §. 129.

§. 133. Aufgabe.

Aus der Höhe h und dem Radius r der Grundfläche den Inhalt J des Cylinders zu berechnen.

Aufl. Der Inhalt der Grundfläche ist (nach §. 179 der Plan.) $= r^2\pi$; multiplicirt man diesen Ausdruck mit der Höhe h, so ergibt sich der gesuchte Inhalt

$$J = r^2\pi h.$$

§. 134. Lehrsatz.

Die abgekürzte Pyramide ist kleiner, als ein Prisma, das mit ihr gleiche Höhe und die größere ihrer Grundflächen zur Grundfläche hat, und größer als ein Prisma, das dieselbe Höhe und die kleinere Grundfläche hat.

Bew. Die abgekürzte Pyramide sei ABCDEF (Fig. 82.); — zieht man in den Ebenen der Seitenflächen BADE und BCFE die Linien DG und FH || BE und legt durch diese Parallelen eine Ebene, welche die erweiterte obere Grundfläche in GH schneidet, so ist offenbar die abgekürzte Pyramide ein Theil des entstandenen Prisma's GHBDFE. Wenn man dagegen AL und CM || BE zieht und durch diese Parallelen eine Ebene legt, so ist offenbar das Prisma ABCLEM nur ein Theil der abgekürzten Pyramide ABCDEF.

In der Figur ist eine dreiseitige Pyramide dargestellt; der Satz läßt sich aber auf ähnliche Art auch für mehrseitige Pyramiden darthun; er folgt indeß auch aus dem so eben von der dreiseitigen Pyramide Erwiesenen, da sich mehrseitige Pyramiden und Prismen durch Diagonalebenen in dreiseitige zerschneiden lassen.

§. 135. Lehrsatz.

Pyramiden mit gleicher Höhe und Grundfläche sind gleich.

Bew. 1. Wenn man beide Pyramiden (Fig. 83.) in einem gleichen Abstande von der Spitze, der mit k bezeichnet sein mag, durchschneidet, so sind die Durchschnitte gleich. Denn nach §. 81 verhalten sich die Durchschnitte, die c und c′ heißen mögen, zu den Grundflächen g und g′ der ganzen Pyramiden, wie die Quadrate der Abstände von der Spitze; also wenn die gleichen Höhen der ganzen Pyramiden mit h bezeichnet sind:

$$c : g = k^2 : h^2$$

und

$$c' : g' = k^2 : h^2,$$

folglich

$$c : g = c' : g'.$$

Da aber nach der Annahme $g = g'$ ist, so muß auch $c = c'$ sein. — Da nun beide Pyramiden gleiche Höhe haben, und jedesmal gleiche Durchschnitte entstehen, wo man auch immer die Pyramiden — in gleichem Abstand von der Spitze — durchschneiden mag, so können offenbar die Pyramiden in ihrem Inhalt nicht von einander verschieden sein. *)

*) Dieser Beweis ist zwar nicht ganz streng, aber vollkommen überzeugend. Denn Niemand wird überhaupt an der Gleich-

Bew. 2. Wenn man die gleichen Höhen der gegebenen Pyramiden in eine beliebige Anzahl, hier z. B. in sieben gleiche Theile theilt und durch die Theilungspunkte Ebenen den Grundflächen parallel legt, so haben die entstandenen Durchschnitte nach dem Obigen in beiden Pyramiden dieselbe Größe und mögen dem zufolge mit einerlei Buchstaben a, b, c, d, e, f und die Grundflächen selbst mit g bezeichnet sein. Ueber diesen Durchschnitten als Grundflächen denke man sich Prismen errichtet, welche sämmtlich $\frac{1}{7}h$ zur Höhe haben. Diese Prismen seien nach der Reihe $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta$.

Nun ist nach dem vorherg. §. in beiden gegebenen Pyramiden

die oberste abgeschnittene kleine Pyramide $< \alpha$,
die zweite abgeschnittene (abgekürzte) Pyramide $< \beta$,
" dritte " " " $< \gamma$,
. . . . . .
. . . . . .
die siebente abgeschnittene (abgekürzte) Pyramide $< \eta$.

Demnach ist offenbar sowohl die eine wie die andere ganze Pyramide $< \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta + \eta$.

Dagegen ist ebenfalls nach dem vorherg. §.

die zweite abgeschnittene (abgekürzte) Pyramide $> \alpha$,
" dritte " " " $> \beta$,
. . . . . .
. . . . . .
die siebente abgeschnittene (abgekürzte) Pyramide $> \zeta$,

folglich sind um so mehr die ganzen Pyramiden, (da noch bei jeder die oberste kleine Pyramide hinzu kommt);

$$> \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta.$$

Hiernach sind beide Pyramiden zwischen zwei Grenzen

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta + \eta$$

und

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta$$

---

heit zweier Körper zweifeln, wenn sie in irgend einer Richtung gleiche Höhe haben und in gleichen Abständen von den Enden dieser Höhen durchschnitten immer gleiche Durchschnitte liefern.

enthalten, welche sich um η von einander unterscheiden, und es müssen folglich die Pyramiden selbst, da sie zwischen jenen Grenzen liegen, um weniger als η von einander verschieden sein. Das Prisma η hat die Grundfläche g und die Höhe $\frac{1}{7}h$, also den Inhalt $\frac{1}{7}gh$. Bezeichnet man nun die eine Pyramide mit P und die andere mit P′, so ist folglich (abgesehen vom Vorzeichen)

$$P - P' < \tfrac{1}{7}gh.$$

Hätte man die Höhen der Pyramiden nicht grade in 7, sondern überhaupt in n gleiche Theile getheilt, so würde man — auf ganz gleiche Weise, wie im Vorhergehenden — offenbar

$$P - P' < \tfrac{1}{n}gh$$

gefunden haben. Nun kann aber n jede beliebige (ganze) Zahl bezeichnen, und man wird folglich n immer so groß annehmen können, daß das Product $\frac{1}{n}gh$ kleiner wird, als jede irgend gegebene noch so kleine Zahl; um so mehr muß folglich die Differenz P — P′ kleiner sein, als jede noch so kleine Zahl; kleiner, als alle andern Zahlen ist (abgesehen vom Vorzeichen) allein Null; also muß

$$P - P' = 0,$$

d. h.

$$P = P' \text{ sein.}$$

§. 136. Lehrsatz.

Jedes Prisma ist das Dreifache einer Pyramide, die mit ihm gleiche Höhe und Grundfläche hat.

Bew. Es sei zunächst ein dreiseitiges Prisma ABCDEF (Fig. 84.) gegeben; — zerschneide dasselbe zuerst durch die Ebene BDF in die dreiseitige Pyramide BDEF und die vierseitige Pymide BADFC (Spitze B, Grundfl. ADFC), zertheile dann diese Pyramide noch durch die Ebene BDC in zwei dreiseitige Pyramiden BADC und BDFC. Die so eben genannten Pyramiden sind offenbar gleich, da sie gleiche Grundflächen ADC und DFC und gleiche Höhe haben, indem ihre Grundflächen in derselben Ebene ADFC und ihre Spitzen in demselben Punkte B liegen. Ferner ist auch die Pyramide BADC = BDEF, da sie gleiche Grundflächen ABC und DEF und gleiche Höhe, nehm-

lich einerlei Höhe mit dem Prisma haben. Da nun alle drei Pyramiden gleich ſind, ſo iſt das Prisma das Dreifache von jeder, alſo z. B. dreimal ſo groß, als die Pyramide BDEF, welche mit dem Prisma einerlei Höhe und Grundfläche hat.

Das ſo eben von einem dreiſeitigen Prisma und einer dreiſeitigen Pyramide Erwieſene gilt aber auch von mehrſeitigen — einmal, weil man für mehrſeitige Prismen und Pyramiden (nach §. 130, 1. und §. 135) dreiſeitige ſetzen kann, die mit ihnen gleiche Höhe und Grundfläche haben; — ferner auch deshalb, weil ſich mehrſeitige Prismen und Pyramiden allemal durch Diagonalebenen in dreiſeitige zerſchneiden laſſen.

§. 137. Zuſatz.

1) Da die Pyramide der dritte Theil eines Prisma's iſt, das mit ihr gleiche Höhe und Grundfläche hat, ſo iſt ihr Inhalt gleich dem dritten Theile des Products aus Höhe und Grundfläche.

2) Von Pyramiden gelten daher auch die in §. 130 von Prismen aufgeſtellten Behauptungen.

§. 138. Lehrſatz.

Der Inhalt eines Kegels iſt gleich dem dritten Theil des Products aus Höhe und Grundfläche.

Bew. Denn der Kegel iſt als eine Pyramide von unendlich vielen Seiten anzuſehen.

§. 139. Aufgabe.

Aus der Höhe h und dem Radius r der Grundfläche eines Kegels den Inhalt J zu berechnen.

Aufl. Der Inhalt der Grundfläche iſt $= r^2\pi$, alſo wenn man mit $\frac{1}{3}h$ multiplicirt, der Inhalt des Kegels

$$J = \tfrac{1}{3}r^2\pi h.$$

§. 140. Aufgabe.

Aus der Höhe h und den Radien r und ϱ der Grundflächen eines abgekürzten Kegels ſeinen körperlichen Inhalt J zu berechnen.

Aufl. Der gesuchte Inhalt wird offenbar erhalten, wenn man vom Inhalt des vollständigen Kegels (Fig. 85.) den Inhalt des ergänzenden kleinern Kegels subtrahirt. Da der Inhalt des schiefen Kegels ganz ebenso gefunden wird, wie der des graden, und da folglich das Nehmliche auch vom abgekürzten Kegel gelten muß, so ist der Kürze wegen in der Figur ein grader Kegel angenommen. Um aber die Inhalte der vorher angeführten Kegel berechnen zu können, hat man zunächst ihre Höhen x und x+h zu bestimmen. Hierzu dienen die Gleichungen:

$$x+h:h = r:r-\varrho \text{ oder } x+h = \frac{hr}{r-\varrho}$$

und $$x:h = \varrho:r-\varrho \text{ oder } x = \frac{h\varrho}{r-\varrho}.$$

Demnach ist der Inhalt des vollständigen Kegels

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{hr}{r-\varrho}\cdot r^2\pi = \frac{1}{3}\pi h\cdot\frac{r^3}{r-\varrho}$$

und der Inhalt des kleinen Kegels

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{h\varrho}{r-\varrho}\cdot\varrho^2\pi = \frac{1}{3}\pi h\cdot\frac{\varrho^3}{r-\varrho},$$

also der Inhalt des abgekürzten Kegels

$$J = \frac{1}{3}\pi h\cdot\left(\frac{r^3-\varrho^3}{r-\varrho}\right) = \frac{1}{3}\pi h(r^2+r\varrho+\varrho^2),$$

indem $\frac{r^3-\varrho^3}{r-\varrho} = r^2+r\varrho+\varrho^2$ ist, wie man sich entweder durch gewöhnliche algebraische Division oder dadurch überzeugen kann, daß man den Quotienten mit dem Divisor multiplicirt, wodurch man den Dividendus erhält.

Anm. Auf ganz ähnliche Weise findet man, wenn g und γ die Grundflächen einer abgekürzten Pyramide bezeichnen, ihren Inhalt

$$J = \tfrac{1}{3}h[g+\sqrt{(g\gamma)}+\gamma].$$

Denn es ist nach §. 81

$$\gamma:g = x^2:(x+h)^2$$

oder $$\sqrt{\gamma}:\sqrt{g} = x:x+h$$

folglich $$x = \frac{h\sqrt{\gamma}}{\sqrt{g}-\sqrt{\gamma}}$$

und $$x+h = \frac{h\sqrt{g}}{\sqrt{g}-\sqrt{\gamma}},$$

und daher $$J = \frac{1}{3}h\cdot\left(\frac{g\sqrt{g}-\gamma\sqrt{\gamma}}{\sqrt{g}-\sqrt{\gamma}}\right) = \frac{1}{3}h[g+\sqrt{(g\gamma)}+\gamma],$$

d. h. die abgekürzte Pyramide ist der Summe dreier Pyramiden gleich, welche sämmtlich mit derselben gleiche Höhe und zu Grundflächen haben die obere, die untere Grundfläche und das geometrische Mittel zwischen beiden.

Dieses Resultat kann aber auch, wenigstens für die dreiseitige abgekürzte Pyramide in der Figur leicht nachgewiesen werden. Zerschneidet man nehmlich die abgekürzte Pyramide (Fig. 86.), sowie das Prisma in §. 136 in drei Pyramiden $BDEF = P_1$, $ABCD = P_2$, $BCDF = P_3$, so ist zunächst

$$1)\ P_1 = \tfrac{1}{3}gh \text{ und } 2)\ P_2 = \tfrac{1}{3}h\gamma.$$

Ferner ist, wenn man D als gemeinschaftliche Spitze der Pyramiden, P_1 und P_3, also BEF und BCF als Grundflächen annimmt:

$$P_1 : P_3 = \triangle BEF : BCF = EF : BC,$$

weil $BC \parallel EF$ ist, also beide Dreiecke, wenn man BC und EF als Grundlinien ansieht, gleiche Höhe haben. — Eben so ist, wenn man die Spitzen der Pyramiden P_3 und P_2 in B denkt und ACD und CDF als Grundflächen ansieht:

$$P_3 : P_2 = \triangle CDF : ACD = DF : AC = EF : BC,$$

weil $\triangle ABC \sim DEF$ ist; folglich verhält sich auch:

$$P_1 : P_3 = P_3 : P_2,$$

also ist $3)\ P_3 = \sqrt{(P_1 . P_2)} = \sqrt{(\frac{1}{9}h^2 g\gamma)} = \frac{1}{3}h\sqrt{g\gamma}$.

Aus (1), (2) und (3) ergiebt sich:

$$J = \tfrac{1}{3}h(g+\gamma+\sqrt{g\gamma}).$$

§. 141. Aufgabe.

Aus dem Radius r einer Kugel ihren Inhalt zu berechnen.

Aufl. So wie der Kreis einem Dreieck gleich ist, welches zur Höhe den Radius, zur Grundlinie die Peripherie hat, so ist die Kugel einer Pyramide gleich, die den Radius zur Höhe und die Kugeloberfläche zur Grundfläche hat. Nach §. 116 ist die Kugeloberfläche $= 4r^2\pi$, folglich wenn man noch mit $\frac{1}{3}r$ multiplicirt, der gesuchte Inhalt der Kugel

$$J = \tfrac{4}{3}r^3\pi.$$

Bemerk. Zur bequemen Uebersicht mögen hier die im Vorhergehenden enthaltenen Formeln über die Berechnung des Inhalts und der Oberflächen der Körper zusammengestellt werden. — Es ist nach den früher angewandten Bezeichnungen:

1) beim Prisma der Inhalt $= gh$;
2) bei der Pyramide der Inhalt $= \frac{1}{3}gh$;

3) beim Cylinder { der Mantel $= 2r\pi h$, der Inhalt $= r^2\pi h$;

4) beim Kegel { der Mantel $= r\pi f$, der Inhalt $= \frac{1}{3}r^2\pi h$;

5) beim abgekürzten Kegel { der Mantel $= (r+\varrho)\pi f$, der Inhalt $= \frac{1}{3}\pi h(r^2+r\varrho+\varrho^2)$;

6) bei der Kugel { die ganze Oberfläche $= 4r^2\pi$, die Oberfl. der Calotte oder Zone $= 2r\pi h$, der Inhalt $= \frac{4}{3}r^3\pi$.

Die Ausdrücke für den Mantel in (3), (4) und (5) gelten aber nur dann, wenn Cylinder und Kegel grade sind.

§. 142. Zusatz.

Haben ein Kegel, eine Kugel und ein Cylinder einerlei Höhe und Durchmesser $(2r)$, so verhalten sich ihre körperlichen Inhalte wie die Zahlen 1, 2, 3.

Bew. Denn es verhält sich

der Kegel: Kugel: Cylinder $= \frac{1}{3}r^2\pi.2r : \frac{4}{3}r^3\pi : r^2\pi.2r$

$= \frac{2}{3} : \frac{4}{3} : 2 = 1:2:3.$

§. 143. Zusatz.

Aus §. 116 und 141 folgt:

1) Die Oberflächen zweier Kugeln verhalten sich wie die Quadrate der Durchmesser oder Radien, und

2) ihre körperlichen Inhalt verhalten sich wie die Kuben (dritten Potenzen) der Durchmesser oder Radien.

Anm. 1. Aehnliche Bestimmungen gelten von ähnlichen Körpern überhaupt. — Da zunächst bei ähnlichen eckigen Körpern die Seitenflächen nach der Reihe ähnlich sind und sich also sämmtlich wie die Quadrate ähnlich liegender Kanten verhalten, so müssen offenbar auch die ganzen Oberflächen in diesem Verhältnisse zu einander stehen. — Bei ähnlichen Pyramiden und Prismen verhalten sich die ähnlich liegenden Kanten wie die Höhen, also die ganzen Oberflächen wie die Quadrate der Höhen. Dasselbe muß folglich auch von ähnlichen Kegeln und Cylindern gelten, und da sich bei diesen die Höhen wie die Radien oder Durchmesser der Grundflächen verhalten, so stehen folglich die Oberflächen im quadratischen Verhältnisse dieser Radien oder

Durchmeſſer, wie dieß für grade Kegel und Cylinder bereits in den Anm. zu §. 93 und 97 dargethan iſt.

So wie ſich ähnliche Polygone durch Diagonalen in ähnliche Dreiecke zerſchneiden laſſen, ſo können offenbar auch ähnliche Polyeder in ähnliche Pyramiden zerſchnitten werden. Die Inhalte zweier Pyramiden überhaupt verhalten ſich

$$J : J' = gh : g'h';$$

bei ähnlichen Pyramiden iſt aber nach §. 88 Anm. 1

$$g : g' = h^2 : h'^2,$$

alſo

$$J : J' = h^3 : h'^3;$$

da ſich nun die Höhen wie homologe Kanten verhalten, ſo verhalten ſich folglich die Inhalte zweier ähnlichen Pyramiden wie die Kuben homologer Kanten, und in dem nehmlichen Verhältniſſe ſtehen nach dem Obigen die Inhalte ähnlicher Polyeder überhaupt. — Die Inhalte ähnlicher Cylinder und Kegel verhalten ſich daher auch, wie man leicht begreift, wie die Kuben der Radien oder Durchmeſſer ihrer Grundflächen.

Anm. 2. Mit Hülfe der vorhergehenden Sätze laſſen ſich auch noch leicht folgende Aufgaben über Inhaltsbeſtimmungen löſen, die nicht ſelten Anwendung finden:

1) Den Inhalt eines dreiſeitigen prismatiſchen Abſchnitts zu berechnen, der von einer ſenkrechten und einer ſchiefen Ebene begrenzt wird. — (Ein prismatiſcher Abſchnitt ſoll überhaupt ein Theil eines prismatiſchen Raumes heißen, der durch zwei nicht parallele Ebenen abgeſchnitten wird.)

Aufl. Zerſchneide den prismatiſchen Abſchnitt **ABCabc** (Fig. 87.) — in ähnlicher Art, wie das Prisma in §. 136 (Fig. 84.) — in drei Pyramiden, **bABC**, **Aabc** und **bACc**, welche beziehlich mit P_1, P_2 und P_3 bezeichnet ſein mögen; — dann iſt zunächſt

$$1.1) \quad P_1 = \tfrac{1}{3} \triangle ABC . Bb.$$

Nimmt man ferner für die Pyramiden P_2 und P_1 die Dreiecke **Aab** und **ABb** als Grundflächen und alſo die Spitzen in **c** und **C** an, ſo haben die Pyramiden, da **cC** der Ebene **ABba** parallel iſt, einerlei Höhe und verhalten ſich alſo wie die Grundflächen **Aab** und **ABb**; dieſe Dreiecke liegen aber zwiſchen den Parallelen **Aa** und **Bb** und haben folglich, wenn man **Aa** und **Bb** als Grundlinien anſieht, dieſelbe Höhe; ſie verhalten ſich daher zu einander wie ihre Grundlinien **Aa** und **Bb**. Demnach iſt

$$P_2 : P_1 = \triangle Aab : ABb = Aa : Bb \text{ oder } P_2 = \frac{Aa}{Bb} . P_1,$$

alſo vermöge (1.1)

$$2.2) \quad P_2 = \tfrac{1}{3} \triangle ABC . Aa.$$

Ebenſo findet man für die Pyramiden P_3 und P_1, wenn **A** als gemeinſchaftliche Spitze und die Dreiecke **bCc** und **BbC** als Grundflächen angenommen werden:

$$P_3 : P_1 = \triangle bCe : BbC = Ce : Bb \text{ oder } P_3 = \frac{Ce}{Bb} . P_1,$$

alſo vermöge (1.1)

$$3.3) \quad P_3 = \tfrac{1}{2} \triangle ABC . Ce.$$

Aus (1.1), (2.2) und (3.3) ergiebt ſich der Inhalt des ganzen Körpers

$$J = \triangle ABC . \frac{Aa + Bb + Ce}{3}.$$

2) Den Inhalt eines dreiſeitigen prismatiſchen Abſchnitts zu berechnen, der durch zwei ſchiefe nicht parallele Ebenen begrenzt wird.

Aufl. Durchſchneide den beiderſeits ſchief begrenzten Abſchnitt ABCabc (Fig. 88.) durch eine ſenkrechte Ebene $\alpha\beta\gamma$; dann iſt nach (1) der prismatiſche Abſchnitt

$$abc\alpha\beta\gamma = \triangle \alpha\beta\gamma . \left(\frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{3}\right),$$

und der prismatiſche Abſchnitt

$$ABC\alpha\beta\gamma = \triangle \alpha\beta\gamma . \left(\frac{A\alpha + B\beta + C\gamma}{3}\right),$$

folglich der Inhalt des ganzen Körpers

$$J = \triangle \alpha\beta\gamma . \left(\frac{Aa + Bb + Ce}{3}\right).$$

3) Den Inhalt eines beliebigen mehrſeitigen prismatiſchen Abſchnitts zu beſtimmen.

Aufl. Zerſchneide den gegebenen prismatiſchen Abſchnitt in dreiſeitige und berechne die Inhalte derſelben nach (2).

4) Den Inhalt eines Pontons (Kummkarrens) anzugeben. (Ein Ponton iſt ein Körper, der von zwei parallelen Rechtecken und von vier Trapezen eingeſchloſſen wird.)

Aufl. Das Ponton kann als ein prismatiſcher Abſchnitt angeſehen werden, der von einem prismatiſchen Raume mit den parallelen Kanten Aa, Bb, Ce, Dd (Fig. 89.) durch die beiden (ſchiefen und nicht parallelen) Ebenen ABCD und abcd abgeſchnitten iſt. Wird nun der prismatiſche Abſchnitt an einer beliebigen Stelle durch eine auf den Kanten ſenkrechte Ebene $\alpha\beta\gamma\delta$ durchſchnitten, und denkt man ſich noch durch zwei gegenüberſtehende parallele Kanten Aa und Ce eine Diagonalebene gelegt, ſo entſtehen zwei dreiſeitige prismatiſche Abſchnitte, deren Inhalte ſich nach (2) beſtimmen laſſen, nehmlich

$$ABCabc = \triangle \alpha\beta\gamma . \left(\frac{Aa + Bb + Ce}{3}\right)$$

und

$$ADCadc = \triangle \alpha\delta\gamma . \left(\frac{Aa + Cc + Dd}{3}\right).$$

Setzt man die obere Länge des Pontons $Cc = Dd = L$, die untere $Aa = Bb = l$, ferner die obere Weite des Pontons $CD =$

cd = $\delta\gamma$ = W und die untere Weite AB = ab = $\alpha\beta$ = w, endlich noch den senkrechten Abstand der beiden parallelen Ebenen AabB und CcdD von einander = h, so ist zunächst

$$\triangle \alpha\beta\gamma = \tfrac{1}{2}h.\alpha\beta = \tfrac{1}{2}h.w$$

und

$$\triangle \alpha\delta\gamma = \tfrac{1}{2}h.\gamma\delta = \tfrac{1}{2}h.W,$$

und wenn man diese Werthe in die vorherg. Gleichungen einsetzt:

$$ABCabc = \tfrac{1}{6}h.w.(2l+L)$$

und

$$ADCadc = \tfrac{1}{6}h.W.(2L+l).$$

Demnach ist der Inhalt des ganzen Körpers

$$J = \tfrac{1}{6}h.[W.(2L+l)+w.(2l+L)].$$

5) Den Inhalt eines Kugelabschnitts zu berechnen, wenn der Radius der Kugel r und die Höhe des Abschnitts h gegeben ist.

Aufl. Wird der Kreisausschnitt ACB (Fig. 90.) um den Radius AC als Axe gedreht, so beschreibt er einen kegelförmigen Kugelausschnitt, der offenbar einer Pyramide gleich ist, welche die vom Bogen AB beschriebene Calotte ($2r\pi h$) zur Grundfläche und den Radius r zur Höhe hat, folglich ist

der Inhalt des kegelförmigen Ausschnitts = $\tfrac{2}{3}r^2\pi h$.

Um den Inhalt des Abschnitts zu erhalten, hat man noch den Inhalt des Kegels zu berechnen, welcher bei der Umdrehung durch das Dreieck BCD erzeugt wird, und hierzu ist vor Allem die Bestimmung der Linie BD erforderlich, welche sich aber ganz leicht aus der Gleichung

$$h : BD = BD : 2r-h \text{ oder } BD^2 = h(2r-h)$$

ergiebt. — Hiernach ist der Inhalt des Kegels = $\tfrac{1}{3}BD^2.\pi.CD = \tfrac{1}{3}h(2r-h)\pi(r-h)$, folglich der Inhalt des Abschnittes

$$J = \tfrac{1}{3}\pi h[2r^2-(2r-h).(r-h)] = \tfrac{1}{3}\pi h(3rh-h^2)$$
$$= \tfrac{1}{3}\pi h^2(3r-h).$$

6) Den Inhalt einer körperlichen Kugelzone zu bestimmen, wenn der Radius der Kugel r, die Höhe der Zone h und der Abstand ihrer größern Grundfläche vom Kugelmittelpunkte a gegeben ist.

Aufl. Die körperliche Zone ist gleich dem Unterschied zweier Kugelabschnitte, von denen der größere die Höhe r—a und der kleinere die Höhe r—a—h hat; der Inhalt der körperlichen Zone ist daher nach (5)

$$J = \tfrac{1}{6}\pi.[(r-a)^2.(2r+a)-(r-a-h)^2.(2r+a+h)],$$

oder nach einigen Zusammenziehungen

$$J = \tfrac{1}{3}\pi h(3r^2-3a^2-3ah-h^2).$$

Bezeichnet man den Radius der größern Grundfläche der Zone mit ϱ_1 und den Radius der kleinern Grundfläche mit ϱ_2, so ist, wie man leicht sieht:

$$\varrho_1^2 = r^2 - a^2$$

und $$\varrho_2^2 = r^2 - (a+h)^2 = r^2 - a^2 - 2ah - h^2,$$

folglich $$\frac{\varrho_1^2 + \varrho_2^2 + h^2}{2} = r^2 - a^2 - ah^2.$$

Hiernach läßt sich dem Ausdruck für den Inhalt der Zone auch folgende merkenswerthe Gestalt geben:

$$J = \tfrac{1}{3}\pi h \cdot [\tfrac{3}{2}(\varrho_1^2 + \varrho_2^2 + h^2) - h^2]$$
$$= \tfrac{1}{6}\pi h (3\varrho_1^2 + 3\varrho_2^2 + h^2)$$
$$= \tfrac{1}{2}\pi h (\varrho_1^2 + \varrho_2^2 + \tfrac{1}{3}h^2).$$

Aus dieser Formel folgt, daß die Zone drei Körpern zusammen genommen gleich ist, nehmlich zweien Cylindern mit der Höhe $\frac{1}{2}h$ und den Radien ϱ_1 und ϱ_2 und einer Kugel mit dem Radius $\frac{1}{2}h$.

Es ist übrigens äußerst merkwürdig, daß sich der Inhalt des Kugelabschnitts und der Inhalt der Zone durch so einfache algebraische Ausdrücke darstellen lassen, während es gar nicht möglich ist, den Inhalt des Kreisabschnitts oder eines Theiles des Kreises, der von zwei parallelen Sehnen begrenzt wird, durch einen bloß algebraischen Ausdruck darzustellen.

Anm. 3. Für die praktische Inhaltsbestimmung ganz unregelmäßig gestalteter (physischer) Körper können folgende Sätze dienen:

1) Jeder Körper verliert im Wasser so viel an Gewicht, als eine Wassermasse wiegt, die mit dem Körper gleichen Inhalt hat.

2) Ein preußischer Kubikfuß Wasser wiegt bei 28° Reaumur im luftleeren Raume 66 Berliner Pfund.

3) Ist das absolute Gewicht eines Körpers und sein specifisches Gewicht (Dichte) bekannt, so erhält man das Gewicht einer Wassermasse, die mit dem Körper einerlei Inhalt hat, wenn man das absolute Gewicht desselben durch das specifische dividirt, und aus dem Gewicht der gleich großen Wassermasse läßt sich mit Hülfe von (2) der Inhalt des Körpers bestimmen.

Bei dem Verleger dieses sind ferner unter Andern erschienen:

Beck, Dr. F. A., Grundriß einer Naturlehre. Für Gymnasien, höhere Bürger- und Realschulen. 4 gGr.

Blätter, Rheinische, für Erziehung und Unterricht. Herausgegeben von Dr. F. A. W. Diesterweg. Jahrgang 1830 bis 1836. Jeder Jahrgang 2 Thlr. 16 gGr.

Bollenberg, J. D., deutsche Vorschriften für den Schul- und Privatgebrauch. 3 Hefte. 3 Thlr. 12 gGr.

—:—, englische Vorschriften. 2 Hefte. 2 Thlr. 8 gGr.

Diesterweg, Dr. F. A. W., die Lebensfrage der Civilisation. Erstes Heft: Ueber die Erziehung der unteren Klassen der Gesellschaft. 6 gGr. Zweites Heft: Werden wir vom 3. August dieses Jahres nicht lernen? 4 gGr. Drittes Heft: Ueber das Verderben auf den deutschen Universitäten. 8 gGr.

Engstfeld, P. F., Gesangfibel für höhere Bürgerschulen und Gymnasien, oder 400 methodisch geordnete kurze musikalische Sätze mit untergelegtem Texte. 6 gGr.

—:—, Grundzüge des Generalbasses; nebst Aufgaben für angehende Choralspieler. 1 Thlr.

Erk, L., Sammlung 3- und 4stimmiger Gesänge ernsten Inhalts. Zwei Hefte. Jedes Heft 12 gGr. Jede Stimme einzeln vom ersten Heft 6 gGr. und vom zweiten 5 gGr.

—:—, Sammlung 1-, 2-, 3- und 4stimmiger Schullieder. 3 Hefte. Jedes Heft 8 gGr. — Das dazu gehörige Supplementheft 8 gGr.

—:—, Sammlung 3- und 4stimmiger Gesänge für Männerstimmen. Erstes Heft 16 gGr. Zweites Heft 12 gGr.

Euripides Phönikerinnen, metrisch verdeutscht und mit Anmerkungen begleitet von H. Knebel. 12 gGr.

Fiedler, Dr. Franz, Geographie des transalpinischen Galliens nach C. Julius Cäsar's Commentarien de bello gallico. Nebst einer Erklärung der übrigen darin vorkommenden geographischen Namen, zum Gebrauche auf Gymnasien. Nebst einer Charte: Gallia antiqua. 8 gGr.

—:—, Geschichten und Alterthümer des untern Germaniens oder des Landes am Niederrhein, aus dem Zeitalter der römischen Herrschaft. Mit 5 Steindrucktafeln. 1 Thlr.

Gauckstterdt, A. J., Stufengang des Sprachunterrichts in der Volksschule. Naturgemäß aufgestellt ꝛc. Erster Cursus. 16 gGr.

Gessert, F., das heilige Land, oder Palästina bis auf Christi Zeit. 4 gGr.

Gläser, K., musikalisches Schulgesangbuch, methodisch geordnet nach Natorp's Anleitung zur Unterweisung im Singen. 2 Bändchen. Jedes 18 gGr.

—:—, kurzgefaßter Unterricht in der Theorie der Tonsetzkunst mittelst eines musikalischen Compasses. 8 gGr.

—:—, 17 musikalische Wandtafeln zum ersten Unterricht im Singen nach Noten, nach Natorp's Methode entworfen. 2 Thlr.

Goltzsch, E. C., Organismus des Sprachunterrichts in der Volksschule. 4 gGr.

Grashoff, J. W., Leitfaden für den Unterricht in der allgemeinen Weltgeschichte. Für die mittleren Klasse der Gymnasien bearbeitet. Zweite verbesserte Auflage. 12 gGr.

Harles, H., de Epicharmo. 8 gGr.

Heinen, Fr., über Systeme von Kräften ꝛc. 8 gGr.
Hengstenberg, C., geographisch-poetische Schilderung sämmtlicher deutschen Lande ꝛc. 1 Thlr.
Hezel, W. F., kürzere hebräische Sprachlehre für Anfänger. 12 gGr.
— —, hebräische Lehrstunden. 6 gGr.
Hofmeister, Dr. K., Beiträge zur wissenschaftlichen Kenntniß des Geistes der Alten. Erstes Bändchen: Die Weltanschauung des Tacitus. 1 Thlr. — Zweites Bändchen: Sittlich-religiöse Lebensansicht des Herodotus. 14 gGr.
— —, Erörterung der Grundsätze der Sprachlehre ꝛc. 2 Bändchen. 1 Thlr. 10 gGr.
— —, Romeo, oder Erziehung und Gemeingeist. 3 Bdchn. 3 Thlr.
Horatius Flaccus sämmtliche Werke. Nach den Versmaßen der Urschrift deutsch von Friedrich Gehlen. Erster Band: Oden, Epoden, Säculargesang. 1 Thlr.
Koppe, C., die Arithmetik, Algebra und allgemeine Größenlehre, für den Schulunterricht bearbeitet. 16 gGr.
— —, Anfangsgründe der ebenen und sphärischen Trigonometrie, für den Schulunterricht, mit 3 Steindrucktafeln. 12 gGr.
Körte, Dr. W., Leben und Studien Friedrich August Wolfs des Philologen. 2 Bde. 3 Thlr.
Litzinger, H. J., die merkwürdigsten Begebenheiten aus der Preußisch-Brandenburgischen Geschichte. Ein Leitfaden für den ersten Unterricht in der vaterländischen Geschichte auf Gymnasien. 5 gGr.
v. Manvillon, F. W., Anweisung zur Erlernung des Schachspiels. Mit 267 Spielen auf 19 Tafeln. 3 Thlr. 12 gGr.
— —, belehrende Unterhaltungen für junge angehende Schachspieler. 5 Bändchen. 2 Thlr. 12 gGr.
Meigen, J. W., Deutschlands Flora, oder systematische Beschreibung der in Deutschland wildwachsenden Pflanzen. Erster Band mit 49 Steindrucktafeln. Subscriptionspreis 2 Thlr. 12 gGr.
Natorp, B. C. B., die kleine Bibel. Zweite Auflage. 20 gGr.
— —, Anleitung zur Unterweisung im Singen. Erster Cursus 20 gGr. Zweiter Cursus 1 Thlr.
— —, Lehrbüchlein der Singekunst. Erster u. zweiter Curs. Jeder 3 gGr.
Möller, Dr. A. W., Wandkarte des heiligen Landes zum Gebrauch beim Unterricht in der heiligen Geschichte. 12 gGr.
— —, Wandkarte des römischen Reichs in seiner größten Ausdehnung. 16 gGr.
Nedelmann, W., Sammlung von Jugendliedern, dreistimmig in Musik gesetzt. Erstes Heft 8 gGr. Jede der einzelnen Stimmen 4 gGr.
— —, Lieder für die Jugend mit leichter Pianofortebegleitung. Erstes und zweites Heft. Jedes Heft 12 gGr.
— —, vierstimmige Lieder für Männerstimmen und die obern Klassen der höhern Schulen in Musik gesetzt. Erstes Heft 16 gGr. Jede der einzelnen Stimmen 6 gGr.
— —, deutscher Liederkranz mit Pianofortebegleitung. Erstes Heft. 16 gGr.
— —, der jugendliche Sängerchor. Eine Auswahl von Jugendliedern 3- und 4stimmig in Musik gesetzt. Drei Hefte Jedes Heft 8 gGr.
Petersen, D. J., kurzer Abriß der Erdbeschreibung nach den neuesten Bestimmungen für Schulen. Dritte Auflage. 12 gGr.
Plücker, Dr. Jul., analytisch-geometrische Entwickelungen. Erster Band mit 8 Kupfertafeln 3 Thlr. Zweiter Band mit 2 Kupfertafeln 2 Thlr. 16 gGr.

Reinbeck, Dr. G., Handbuch der Sprachwissenschaft mit besonderer Hinsicht auf die deutsche Sprache. Zum Gebrauch für die obern Klassen der Gymnasien und Lyceen. 4 Bde. 5 Thlr. 22 gGr. Auch unter den besondern Titeln:

I. Bds. 1. Abth. Die reine allgemeine Sprachlehre. 12 gGr.
I. „ 2. „ Die angewandte allgem. Sprachlehre. 16 gGr.
II. „ 1. „ Die Rhetorik. 18 gGr.
II. „ 2. „ Die Poetik, in ihrem Zusammenhange mit der Aesthetik. 20 gGr.
III. Bds. 1. Abth. Die Geschichte der Dichtkunst und ihre Literatur. 16 gGr.
III. „ 2. „ Poetische Beispielsammlung zu Vorlesungen über Poetik und zur Declamation. 1 Thlr. 8 gGr.
IV. Bd. Prosaische Beispielsammlung zu Vorlesungen über Rhetorik und zum lauten Vortrage systematisch geordnet. 1 Thlr. 4 gGr.

Savels, Dr. J. A., Grundriß der vergleichenden Lehre von dem Gebrauch der Modi in der deutschen, französischen, lateinischen und griechischen Sprache. (Unter der Presse.)

—s—, commentatio de M. T. Ciceronis oratione. 6 gGr.

Sophoclis Oedipus coloneus ex recensione Brunkii cum notis et indice edidit A. C. Meineke. 8 gGr.

Tacitus, Corn., Agricola. Lateinisch und Deutsch mit Anmerkungen von J. C. Schlüter. 18 gGr.

—s— Annalen, deutsch von J. C. Schlüter. 3 Bde. 3 Thlr. 12 gGr.

—s— Geschichtsbücher, deutsch von J. C. Schlüter. 1 Thlr. 8 gGr.

Tappe, W., allgemeine Uebungen im freien Zeichnen. Vierte Ausgabe mit 104 Steindrucktafeln. 1 Thlr. 16 gGr.

—s—, Blumen, Früchte, Vasen ꝛc. zur fortgesetzten Uebung im freien Zeichnen. Mit 20 Kupfertafeln. 1 Thlr.

—s—, allgemeine erste Uebungen im mathematischen Zeichnen, nebst einer Anweisung zum Aufnehmen und Berechnen einzelner Grundstücke. Mit 14 Steindrucktafeln. 18 gGr.

Thiersch, Dr. B., Gesangbuch für die evangelischen Gymnasien der Provinz Westphalen. Nebst einer Beilage, enthaltend Schulgebete und Gesangstücke zu besondern Schulereignissen mit Melodien. 12 gGr.

Unterhaltungen für die gebildete Jugend, aus dem classischen Alterthume und der neuern Geschichte. 2 Bde. 2 Thlr. 8 gGr.

Volkhart, F. A., die Lehre vom griechischen Accente, als Hülfsbuch für Anfänger beim Uebersetzen. 5 gGr.

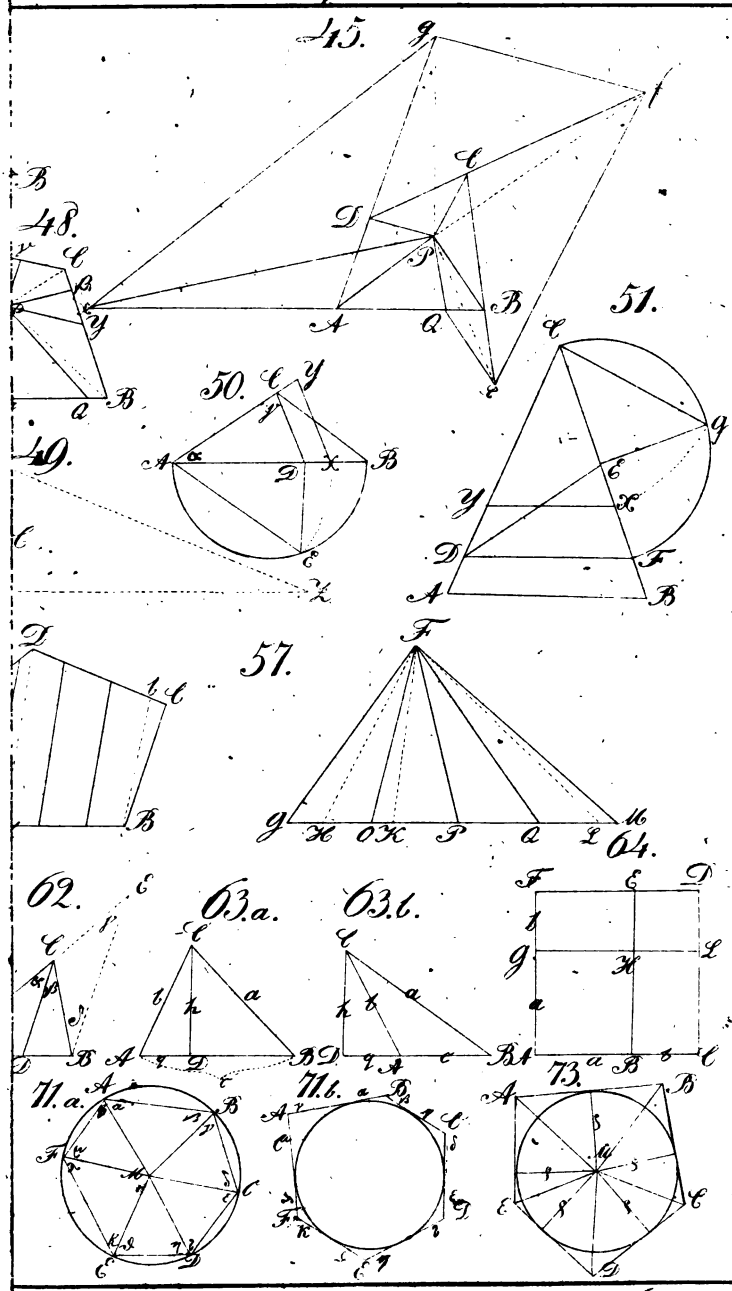
Weber C. F., Repertorium der classischen Alterthumskunde. 3 Bände, die Literatur der Jahre 1826, 1827 und 1828 umfassend. 5 Thlr.

Wilberg, Dr. Fr., das Netz der allgemeinen Karten des Eratosthenes und Ptolemäus. Aus den Quellen dargestellt. Mit 1 Steindrucktafel. 8 gGr.

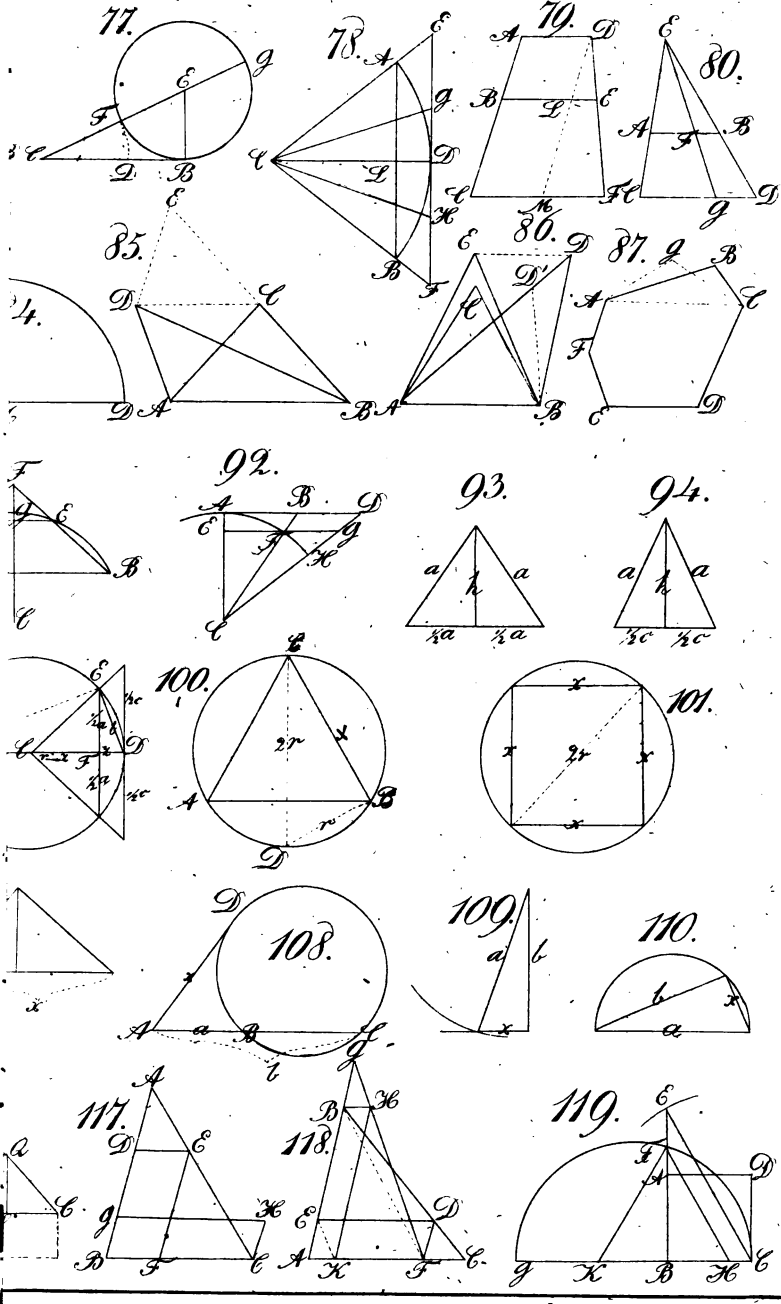
Wilberg, Dr. J. F., Erinnerungen aus meinem Leben, nebst Bemerkungen über Erziehung, Unterricht und verwandte Gegenstände. 20 gGr.

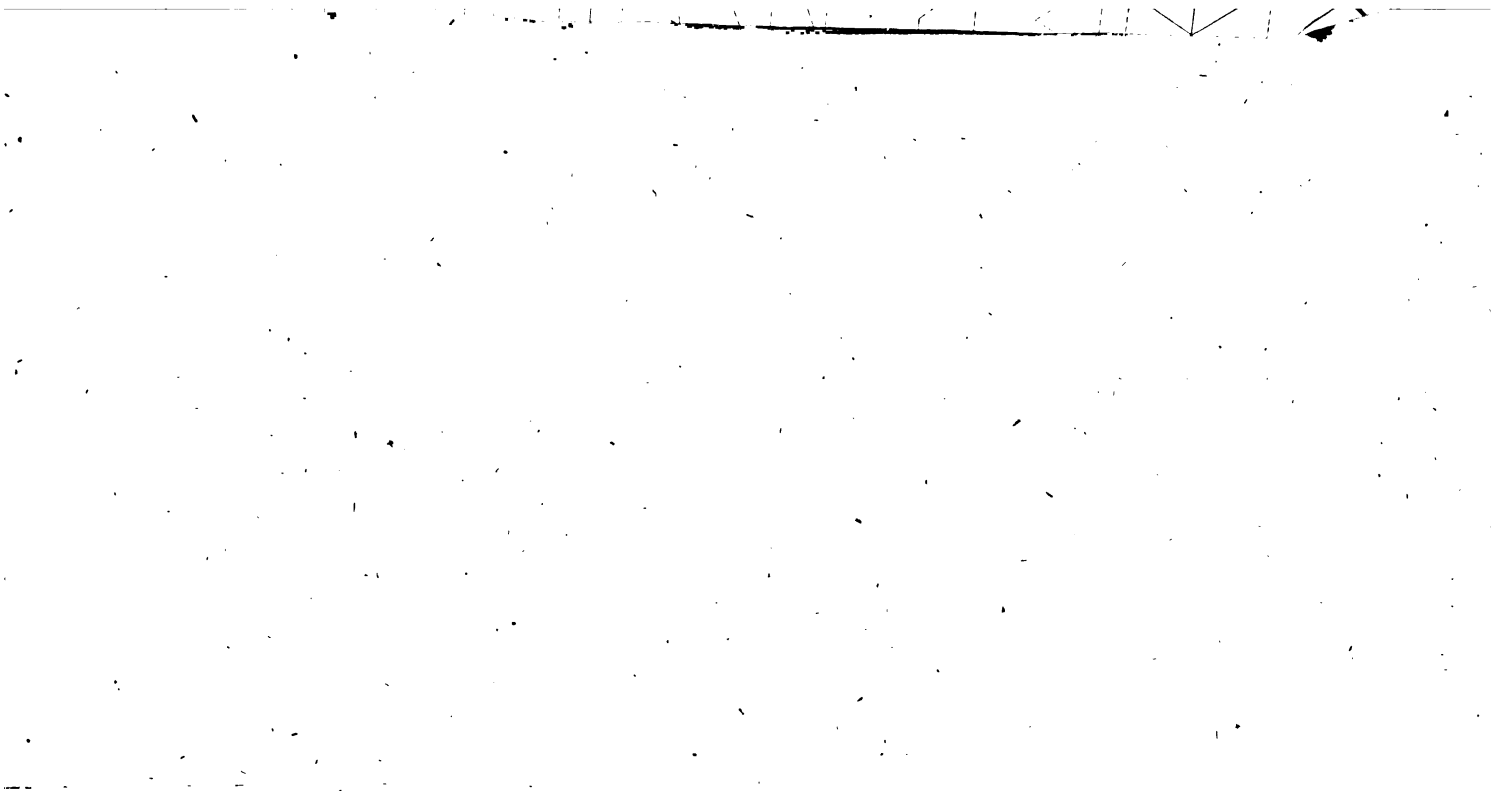
—s—, Aufsätze über Unterricht und Erziehung. 2 Bde. 2 Thlr. 18 gGr.

Taf. II. zur Planimetrie.

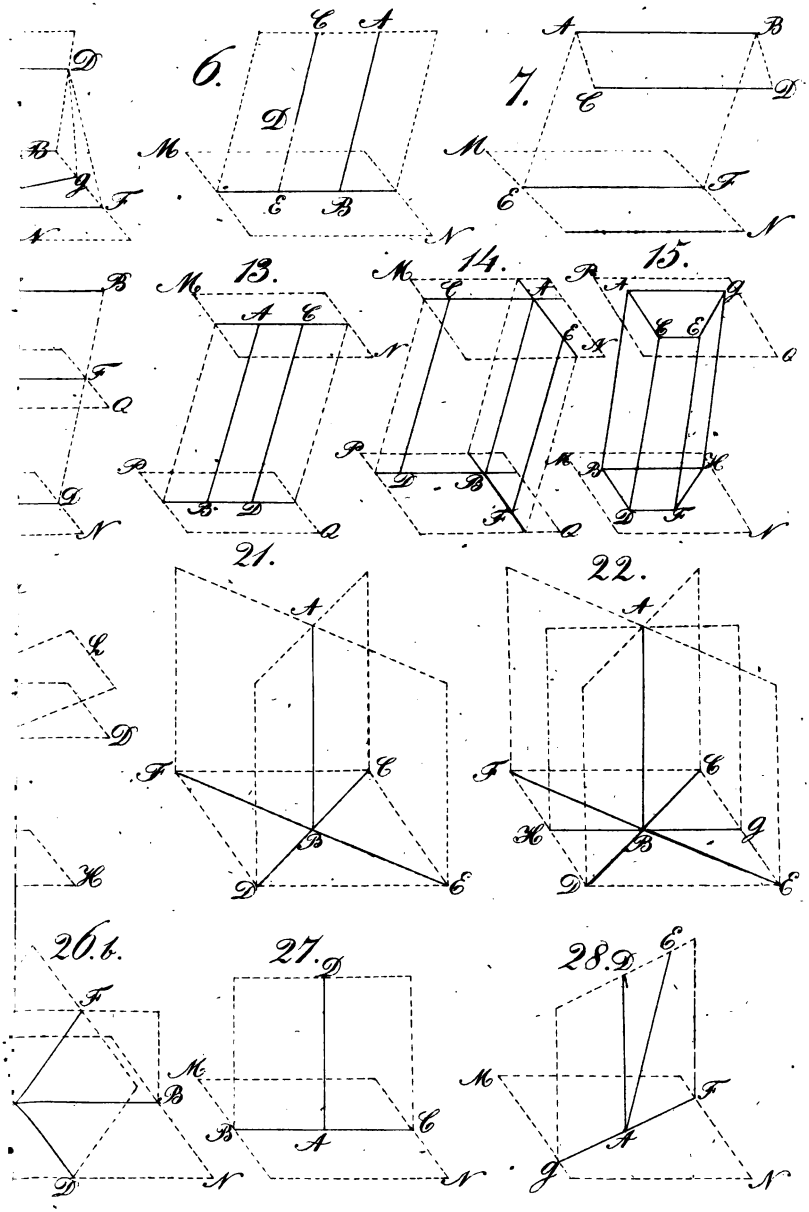


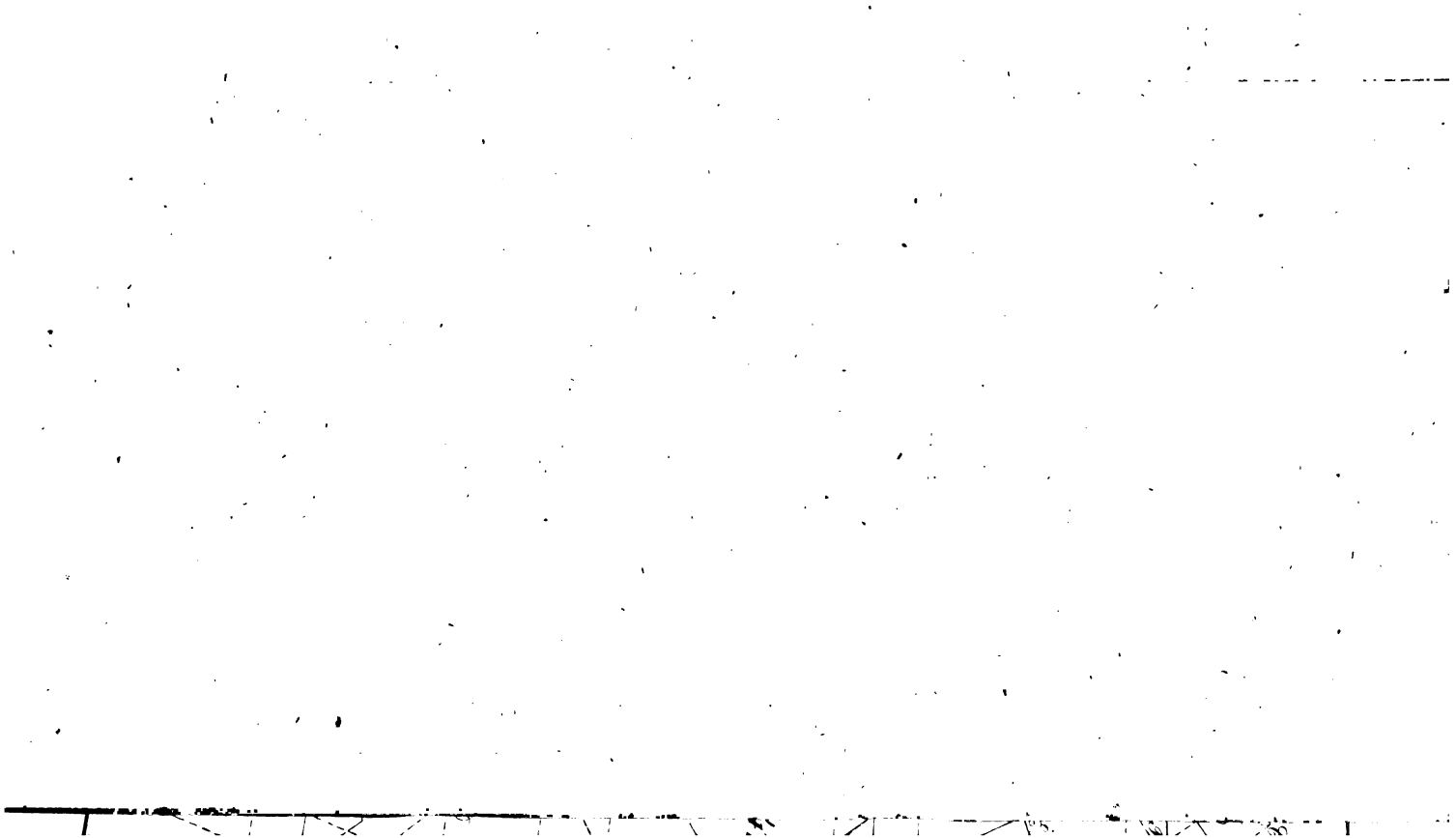
Taf. III. zur Planimetrie.





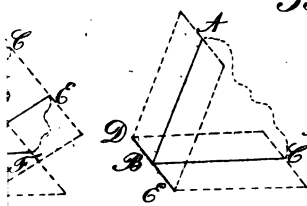
Tafel IV zur Stereometrie.



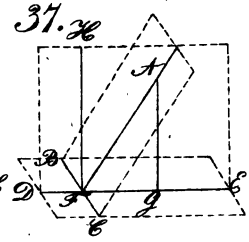


Tafel V zur Stereometrie.

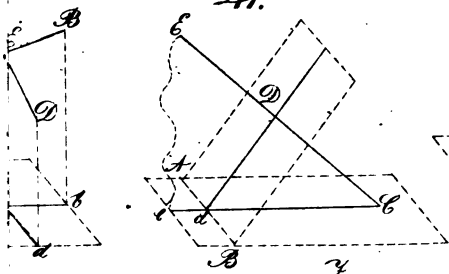
35.



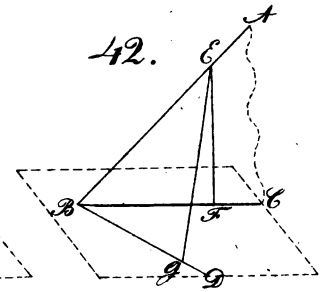
37.



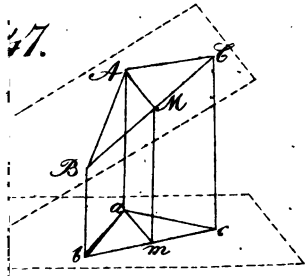
41.



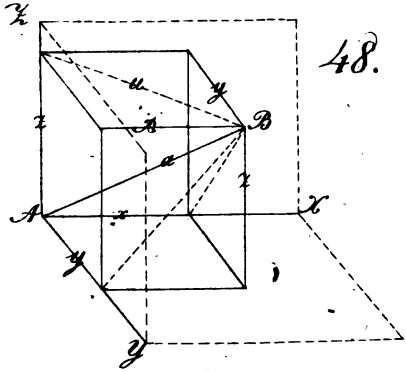
42.



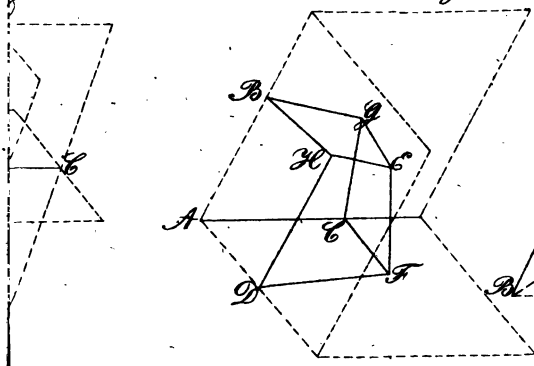
47.



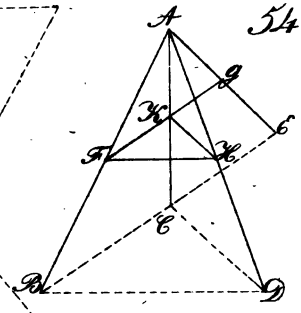
48.

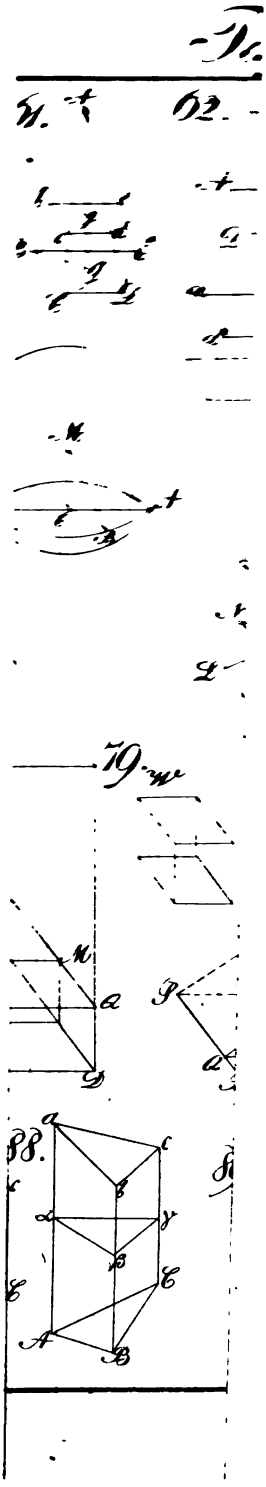


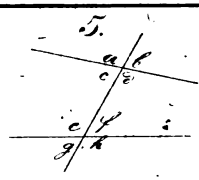
53.

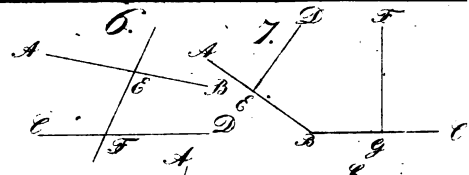


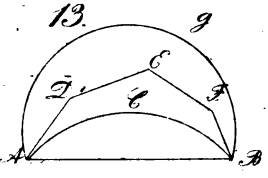
54.

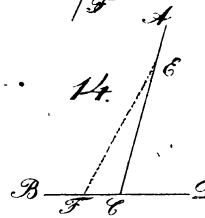


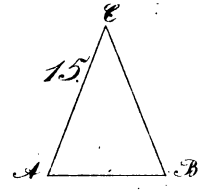


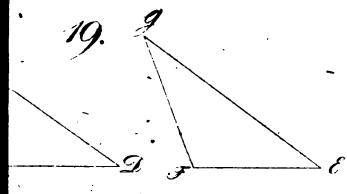

5.
a
b
c
e
c
f
g
k

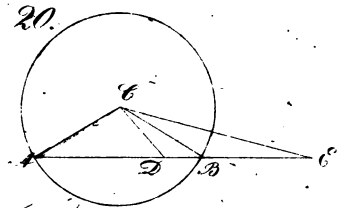

6.
A
E
C
D
F
7.
D
F
A
B
E
C
B
G

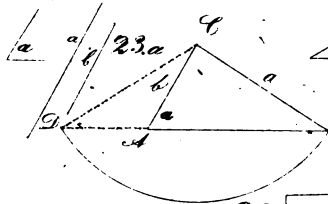

13.
g
C
D
b
F
A
B

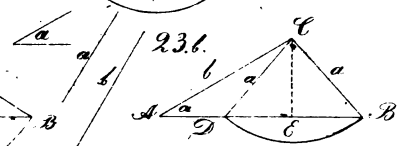

14.
A
E
B
F
C
D

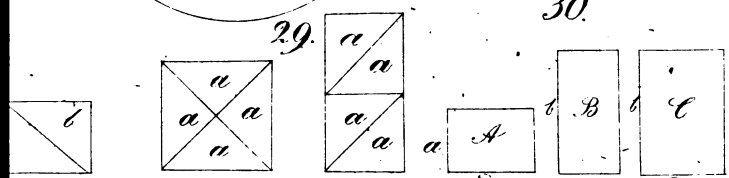

15.
E
A
B

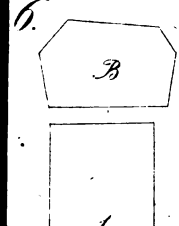

19.
g
D
F
E

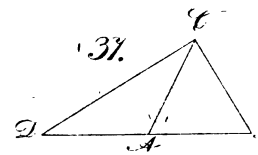

20.
C
A
D
B
E

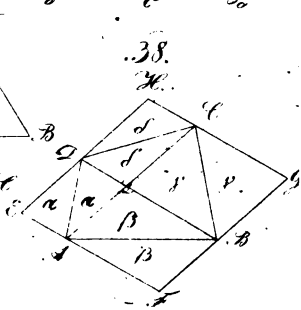

a
a
b
23.a
C
b
a
D
A
B

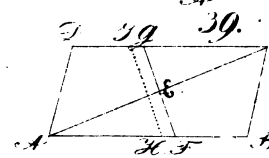
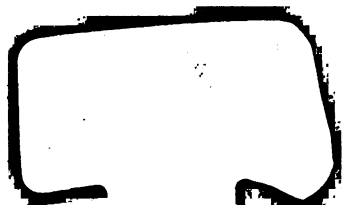

a
a
b
23.b
C
b
a
a
A
D
E
B


29.
a
a
a
a
a
a
a
a
b
30.
a
A
a
b
B
b
C
a
b
c


6.
B
b


37.
C
D
A
B


38.
H.
C
d
d
D
d
a
a
β
B
A
B
β
F


D
39.
C
E
A
H
F
B

A 1 2 - 15 2